Profesor Ypsilon na Velké kunratické

Matematik X. Ypsilon, známý přívrženec a aktivní provozovatel běhu pro kondici a pro zdraví, se v místě startu 47. ročníku Velké kunratické, konaného v neděli 9. listopadu 1980, rozcvičoval poněkud zachmuřeně. Příčinou jeho chmur nebyl blížící se start a očekávání běhu členitým terénem v délce přes tři kilometry, ale obavy, zda jeho studenti vyřeší matematickou úlohu, která ho při pozorování předstartovního hemžení závodníků se startovními čísly na prsou napadla:

Kolik cifer potřebovali organizátoři k napsání startovních čísel pro všechny účastníky kategorie mužů a veteránů?

Víme-li, že v uvedeném ročníku startovalo v této kategorii 2212 běžců, pak počet cifer potřebných k napsání všech startovních čísel pro ně určíme snadno: startovních čísel jednociferných je právě 9, dvouciferných 90, trojciferných 900 a čtyřciferných 2212 — 999 = 1213, takže cifer je zapotřebí:

9 + 2.90 + 3.900 + 4.1213 = 7741

Vyřešíme však tento příklad i v obecném případě *n* startujících? Pokusme se o to!

Určíme nejprve počet cifer potřebných k zápisu přirozeného čísla *n*, a to takto: víme, že existuje jediné přirozené číslo *k* takové, že:

$$10^k \leqq n < 10^{k+1};$$

počet cifer čísla *n* je pak zřejmě roven *k* + *l*. Pokročilejší z vás si mohou zdůvodnit, že počet cifer čísla *n* je roven charakteristice dekadického logaritmu čísla *n* zvětšené o jednu, tj. l + [log *n*], kde hranatá závorka znamená celou část čísla log *n*.

Vypočteme dále počet všech přirozených čísel nejvýše rovných *n*, která obsahují týž počet k + l cifer jako číslo *n*; tento počet je roven rozdílu:

$$n - \underbrace{99\ldots9}_{k} = n - (10^k - 1).$$

Pro zápis všech přirozených čísel nejvýše rovných *n*, jež mají týž počet cifer jako (*k* + 1)-ciferné číslo *n*, je tedy celkový počet cifer roven:

n + 1 – 10k (*k* + 1)

Počet cifer potřebných k zápisu všech přirozených čísel, která mají nejvýše k cifrám, tj. která mají méně cifer než číslo n, je roven součtu:

$s = 1.9 + 2.90 + 3.900 + \ldots + (k - 1).\ 9.10^{k-2} + k.9.10^{k-1}$

Vynásobíme-li tuto rovnost deseti, dostaneme:

$10.\ s = 1.90 + 2.900 + 3.9000 + \ldots + (k - 1).9.10^{k-1} + k.9.10^{k}$

a jejím odečtením od rovnosti původní máme:

$-9.\ s = 1.9 + 1.90 + 1.900 + \ldots + 1.9.10^{k-1} - k.9.10^{k}$

Sečtením prvních k členů součtu na pravé straně poslední rovnosti a po jednoduché úpravě je:

$$s = k \, . \, 10^k - \frac{1}{9}(10^k - 1) \, .$$

Pro počet cifer potřebných k zapsání všech startovních čísel tak dostáváme:

$$k \, . \, 10^k - \frac{1}{9}(10^k - 1) + (n + 1 - 10^k)(k + 1) \, ,$$

což ještě upravíme na výsledný tvar:

$$(n + 1)(k + 1) - \frac{1}{9}(10^{k+1} - 1) \, .$$

Provedeme-li kontrolu pro n = 2212, dostaneme souhlas s výsledkem předchozím:

$$(2212 + 1)(3 + 1) - \frac{1}{9}(10^{3+1} - 1) = 8852 - 1111 = 7741 \, .$$

Nejenže jsme rozptýlili obavy profesora Ypsilona, ale přesvědčili jsme se vyřešením jeho příkladu o své dobré matematické kondici. Jak je to ale s kondicí fyzickou? Nepotřebovala by prověřit druhou listopadovou neděli letošního roku na 74. ročníku Velké kunratické? Vhodná trať je připravena nejen pro profesora Ypsilona, ale i pro vás!