Úloha 1
Zapište výčtem množinu A, která obsahuje všechna přirozená lichá čísla menší než 12, a rozhodněte, zda platí $\{7\} \in A$, $7 \in A$.

[$A = \{1, 3, 5, 7, 11\}$; neplatí; platí.]

I když se úloha 1 jeví jako triviální, její správné vyřešení, konkrétně druhé části úlohy, je důležitým krokem na cestě k porozumění symbolickým zápisům v matematice. Žák, který tuto úlohu vyřešil dobře a s pochopením, by se později neměl například dopustit následující chyby při zápisu množiny řešení rovnice $(x - 3) \cdot (4 + x) = 0$ s neznámou x, tj. chyby „$x = \{-4, 3\}$“.

Učivo o množinách a vztazích mezi nimi umožňuje prostřednictvím řady úloh rozvíjet žákovské kompetence, které souvisejí se správným zapisováním, čtením a interpretací matematických vztahů v symbolickém jazyce.

Úloha 2
Přečtěte tyto zápisy a pokud to lze, zapište množiny výčtem a určete, kolik mají prvků:
a) $\{x \in N; 0 < x < 5\}$,
[Množina všech přirozených čísel, která jsou menší než 5; $\{1, 2, 3, 4\}$; čtyři prvky.]
b) $\{y \in R; y^2 = -4\}$,
[Množina všech reálných čísel, jejichž druhá mocnina je rovna – 4; $\emptyset$; žádný prvek.]
c) $\{z \in Q; z \geq 0\}$.
[Množina všech nezáporných racionálních čísel; nelze zapsat výčtem; nekonečná množina.]

Úloha 3
Zapište symbolicky množiny dané charakteristickou vlastností jejich prvků:
a) množinu A všech celých čísel, která jsou řešením rovnice $x + 5 = 9 + 3x$,
b) množinu B všech nekladných racionálních čísel,
c) množinu C všech přirozených čísel, která dělí[1] číslo 24.

[a) $A = \{x \in Z; x + 5 = 9 + 3x\}$; b) $B = \{x \in Q; x \leq 0\}$; c) $C = \{x \in N; x \mid 24\}$]

Úloha 4
Je dána množina $A = \{x \in Z; -4 \leq x < 12\}$. Určete výčtem následující množiny:
a) $D = \{x \in A; -1 < x \leq 4\}$,
b) $E = \{x \in A; x^2 \geq 81\}$.

[a) $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $E = \{9, 10, 11\}$]

Úloha 5
Zapište množinu všech přirozených čísel, která jsou děliteli čísla 12 a která jsou současně menší než číslo 12. Rozhodněte o správnosti následujících zápisů a odpověď zdůvodněte:
a) $\{x \in N; x < 12\}$,
b) $\{2, 3, 4\}$,
c) $\{x \in N; 0 < x < 7\}$,
d) $\{x \in Z^+; x \mid 12\}$,
e) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

[1] Vztah „číslo x dělí číslo n“ zapisujeme „$x \mid n$“; říkáme také, že číslo x je dělitelem čísla n.

[a) Ne, neboť množina obsahuje např. číslo 10, které není dělitelem 12.
b) Ne, množinaneobsahuje např. dělitele 1.
c) Ano, množina obsahuje prvky 1, 2, 3, 4, 6.
d) Ne, množina obsahuje číslo 12.
e) Ano, množina obsahuje všechny požadované dělitele.]

Úlohy typu 4 a 5 mohou být využity k propedeutice vztahů mezi množinami – **inkluzi** a **rovnosti množin**. V průběhu řešení těchto úloh lze diskutovat o tom, které prvky mají množiny stejné a které ne, a vést tak žáky k rozlišování mezi inkluzí a rovností. Obvykle se na gymnáziu používá pro inkluzi symbol „$\subset$“ (v úloze 4 je $D \subset A$, $E \subset A$, $D \subset D$, $E \subset E$, $A \subset A$, $D \neq A$, $E \neq A$, $D \neq E$); je-li $D \subset A$, ale $D \neq A$, potom D je vlastní podmnožinou A.

V této části výuky je důležité, aby si žáci uvědomili, kdy **A není podmnožinou B** ($A \not\subset B$), tj. když některý prvek A neleží v množině B. Také by měli důsledně rozlišovat mezi vztahy „být prvkem množiny“ a „být podmnožinou“ (úloha 1); tuto dovednost využijí později například v geometrii při zápisu vztahu „přímka p leží v rovině ρ“ – správný zápis $p \subset \rho$, nikoliv $p \in \rho$.

Určité problémy při probírání množin může žákům činit pochopení, že $\emptyset$ je podmnožinou každé množiny. Tento vztah se většinou vysvětluje tím, že neexistuje prvek z $\emptyset$, který není prvkem libovolné množiny [1], [2]. Později, když se žáci seznámí s výroky, lze vztah objasnit také pomocí implikace[2].

Rovnost dvou množin by žáci měli chápat nejen z hlediska totožnosti jejich prvků, ale především jako „oboustrannou inkluzi“, tj. $A \subset B$ i $A \supset B$. Takto chápaná rovnost množin by měla žáky vést k správnému formulování vztahů mezi matematickými objekty; tedy v případě vyšetřování vzájemné polohy přímky a roviny by tak žáci mohli sami rozpoznat nesprávnost formulace „přímka je s rovinou totožná“ (použití analogie „totožných přímek“), neboť existují body roviny, které neleží na dané přímce.

Vhodným nástrojem při zavádění a procvičování **průniku**, **sjednocení**, **rozdílu množin** a **doplňku množiny** v množině jsou **Vennovy diagramy**. Správné používání Vennových diagramů vyžaduje dobrou orientaci v těchto diagramech a pochopení vztahů mezi jednotlivými částmi konkrétního diagramu.

Úloha 6

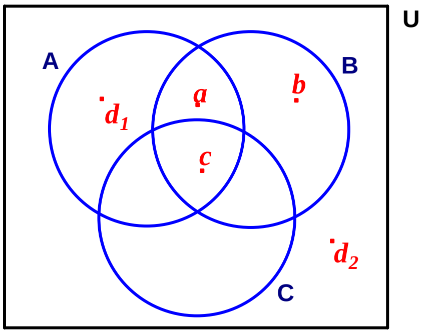
Do Vennova diagramu pro tři podmnožiny A, B, C množiny U zakreslete následující prvky a symbolicky zapište jejich vztah k podmnožinám A, B, C; využijte přitom množinové operace:

a) $a \in U$, a leží současně v A i B, ale neleží v C,
b) $b \in U$, b leží v B, ale neleží ani v A ani v C,
c) $c \in U$, c leží v A i B i C,
d) $d \in U$, d neleží ani v B ani v C.

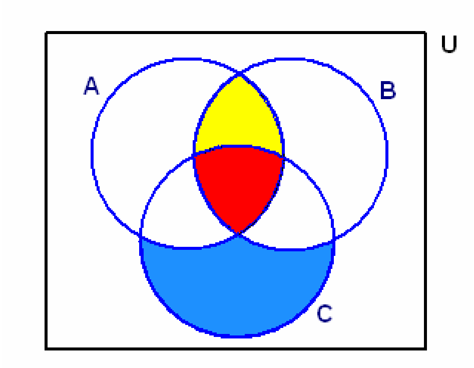
[a) $a \in (A \cap B) - C$; b) $b \in B - (A \cup C)$; c) $c \in A \cap B \cap C$; d) $d \in (B \cup C)_U{}'$, v tomto případě lze prvek d zakreslit do dvou oblastí jako d_1 a d_2; obr. 1]

---

[2] Vztah $A \subset B$ lze formulovat pomocí implikace, která platí pro každý prvek A: Leží-li prvek x v množině A, potom leží v množině B. Pro $\emptyset$ a libovolnou množinu B je implikace $x \in \emptyset \Rightarrow x \in B$ splněna vždy, neboť neplatí předpoklad této implikace.



Obr. 1

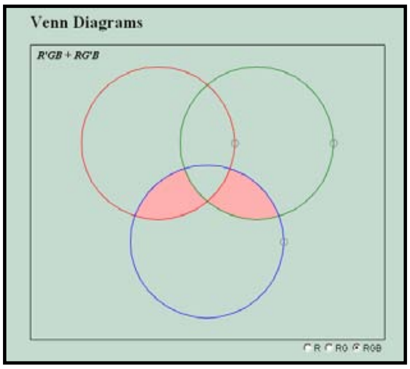


Obr. 2

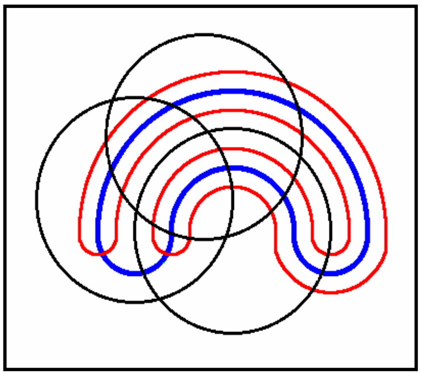
Úloha 7
Pomocí množinových operací mezi podmnožinami A, B, C množiny U zapište symbolicky podmnožinu, která je na Obr. 2 znázorněna:
a) modrou barvou,
b) červenou barvou,
c) žlutou barvou.

[a) např. $C - (A \cup B)$; b) např. $A \cap B \cap C$; c) např. $(A \cap B) - C$]

V případě, že chceme vytvářet složitější situace, než které jsou uvedeny v úloze 7, můžeme ke konstrukci Vennových diagramů s vybarvenými podmnožinami využít aplet[3]. Na obr. 3 je aplet pro tři podmnožiny R, G, B, který zachycuje situaci $(R' \cap G \cap B) \cup (R \cap G' \cap B)$. Názvy R, G, B jsou zkratky barev, kterými jsou množiny v diagramu znázorněny (Red, Green, Blue); po kliknutí na kteroukoli oblast diagramu se příslušná zóna vybarví růžovou barvou a v levém horním rohu diagramu se objeví množinový zápis zvolené oblasti.



Obr. 3



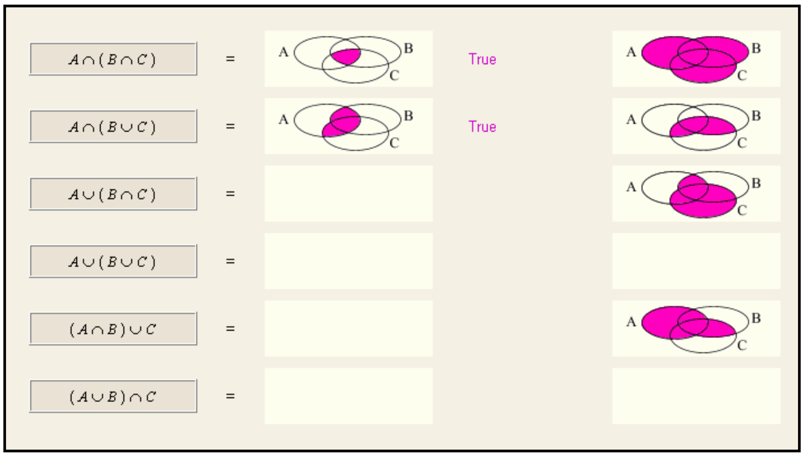
Obr. 4

Vennovy diagramy se také využívají ke zkoumání vlastností množinových operací (asociativity průniku i sjednocení, distributivnosti průniku vzhledem ke sjednocení atd.). Jejich další využití je při řešení slovních úloh, ve kterých se určují počty prvků konečných podmnožin[4] základní množiny (Calda; Šedivý). Právě v těchto úlohách žáci využijí dovednosti, které procvičovaly úlohy 6 a 7.

[3] Aplet je program v jazyce Java, který je navržen pro spouštění z WWW prohlížeče.

[4] Ve škole řešíme úlohy s nejvýše 4 podmnožinami základní množiny U, neboť diagram pro 5 a více podmnožin je obtížné sestrojit a získaný diagram je nepřehledný (na obr. 3 je příklad Vennova diagramu pro 5 podmnožin).

Žákovské kompetence související s množinovými operacemi je vhodné rozvíjet prostřednictvím řešení celé řady úloh. V případě, že lze výuku přemístit do počítačové učebny, můžeme procvičování látky oživit zadáním „puzzle testů“ (odkaz Intersection and union - získáme přiřazovací test na průnik a sjednocení množin) - Obr. 5

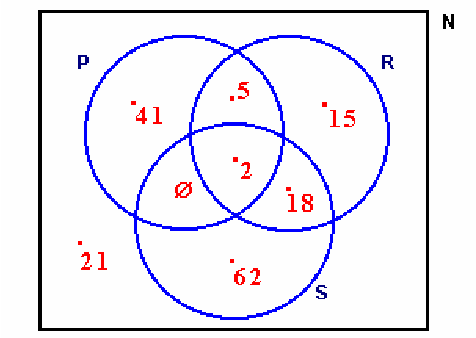


Na závěr si uvedeme úlohu[5], která ilustruje využití Vennových diagramů při procvičování vztahů mezi matematickými objekty, konkrétně mezi různými podmnožinami N.

Úloha 8

Sestrojte Vennův diagram pro tři podmnožiny P, R, S množiny přirozených čísel N. Množina P je množina všech prvočísel, R je množina všech přirozených čísel menších než 20 a S je množina všech sudých přirozených čísel. Zakreslete do každé oblasti v diagramu aspoň jedno přirozené číslo, které v této oblasti leží; pokud takové číslo neexistuje, použijte symbol ∅.

[např. diagram na obr. 6]



Obr. 6

[5] Námět dodala RNDr. H. Kommová z Gymnázia J. Keplera v Praze.