

Co říkají grafy (projekt M.10)

Ve vyučování matematice na základní škole je funkce zpravidla prvním pojmem, který v sobě obsahuje určitou dynamiku, pohyb, a to výrazně ovlivňuje pojmotvorný proces. Významného pokroku bylo dosaženo především v tom, že učební osnovy všech tří platných vzdělávacích programů¹ pro naši základní školu předpokládají, že propedeutika pojmu funkce začíná v implicitní podobě již od prvních ročníků základní školy, a to s výraznějším využitím všech možných mezipředmětových vazeb a se soustavným upevňováním a posilováním oboustranné vazby funkce – (reálný) děj. Dynamická povaha pojmu funkce velice dobře umožňuje při didaktické interpretaci v konkrétním školním vyučování využívat mimo jiné experimentování, řešení úloh intuicí a lokální dedukcí, uspořádáním poznatků, modelováním, ale také včasnou propedeutiku dalších pojmů.

V našich podmínkách však tradičně převažuje, i při uplatňování genetického přístupu k pojmu funkce, zadávání funkce rovnicí, přestože v dějinách matematiky byl prvotní popis závislosti pomocí tabulek a slovních vyjádření. Naše škola reaguje jen opožděně (nebo vůbec ne) na to, že v současné době je mnoho informací, včetně popisu nejrozličnějších závislostí, předáváno formou grafů, diagramů a tabulek. Tak je již v počáteční fázi zanedbáváno pěstování dovednosti „číst“ vlastnosti závislosti nebo funkce z jejího grafu nebo z diagramu. Přitom je graf funkce pro žáky přirozenějším nositelem představ o funkci a jejích vlastnostech než rovnice nebo tabulka hodnot. Proto zařazujeme do vyučování takové projekty, při jejichž řešení má žák možnost studovat vlastnosti funkce pomocí jejího grafu.

Jedním z takových projektů je projekt „Co říkají grafy“, který zadáváme v různých podobách žákům různých ročníků (většinou jako mimoškolní projekt). Zatím nejzajímavější výsledky řešení tohoto projektu jsme získali ve školním roce 1999 - 2000, kdy na projektu pracovali žáci osmého ročníku (třída 8.A). Dvojice žáků zpracovávaly projekt po dobu jednoho týdne, a to samostatně mimo školu. Potom předložily vyplněné zadávací listy a prezentovaly výsledky své práce ve vyučování matematice. Žáci měli v té době bohaté zkušenosti se čtením i konstrukcí jízdních grafů a využívali jich velice často při řešení slovních úloh o pohybu. Předpokládali jsme, že transfer těchto zkušeností výrazně ovlivní řešení projektu. Nestalo se tak. Dominantní byl tento vliv pouze u dvou z jedenácti dvojic žáků, které na projektu pracovaly. Tyto dvě dvojice sice předložily celkem sedm, podle nich různých, řešení projektu, ale ve skutečnosti šlo ve všech případech pouze o různé popisy jednoho a téhož jízdního grafu. Všechny zbývající dvojice uvedly jízdní graf pouze jako jednu z možných interpretací a nabídly další a mnohdy i námi neočekávaná řešení. Pro naši další práci byla podstatná následující zjištění:

- Žáci byli schopni otevřené zadání úlohy interpretovat v různých kontextech, a to i mimo matematických. V této souvislosti nás překvapily především fyzikální interpretace (změny teploty a zejména změny skupenství v závislosti na čase).
- V poznatkové struktuře našich žáků ještě nedošlo k vytvoření univerzálního modelu spojitě (nespojitě) funkce. „Spojitou“ čáru použili i k interpretaci nespojitých dějů (měření teploty v určitých časových intervalech, spojení, doplňování vody v nádrži pomocí konví).
- Žáci si byli vědomi omezujících podmínek pro jednotlivé popisy závislostí (např. omezenosti oboru hodnot, která je dána např. objemem nádrže nebo velikostí skupenského tepla tání ledu).
- Žáci si uvědomovali, že existují přesnější nástroje grafického záznamu závislostí (např. digitální termograf).

¹ Programy Národní škola, Obecná škola a Základní škola.

V následující tabulce uvádíme přehled všech žákovských řešení (včetně nesprávných) a některé výpovědi žáků. Za nejdůležitější z nich považujeme ty, které sami žáci po předchozí diskusi označili jako základní charakteristiky předloženého grafu.

Projekt M.10: Co říkají grafy Základní charakteristiky grafu: 1. začátek, 2. nic se neděje (větší hodnota), 3. graf klesá, 4. nic se neděje (menší hodnota), 5. graf stoupá, 6. konec.		
Závislost	Sledované veličiny	Co se děje (žákovské výpovědi)
jízdní grafy	čas, vzdálenost	• Vlak (auto, žák, pes, ...) se pohybuje mezi dvěma místy různou rychlostí nebo stojí. • Graf je možno různě protahovat (čas běží pořád).
voda v nádrži	čas, objem vody	• V nádrži je nějaké množství vody, otevře se odtokový kohout, voda ubývá, po určité době se zase zavře, a pak se otevře přítokový, kterým přitéká voda jinak rychle, voda přibývá. • Místo vypouštění a napouštění můžeme z nádrže odnášet vodu v konvích a v jiných konvích ji potom zase dodávat. • Jde to dělat tak dlouho, dokud se nádrž nevyprázdní (např. kdybychom zapomněli zavřít odtok). • Taky může voda přetéct, pokud necháme přítok dlouho otevřený.
změny teploty	čas, teplota	• Pravidelně sledujeme venkovní teplotu. Ta se nejdřív chvíli nemění, potom klesá, potom se zase nemění, a pak stoupá. • Z digitálního teploměru bychom ale neměli tak pěknou čáru.
změny skupenství	čas, množství tepla	• Ochlazujeme vařící vodu, až začne její teplota klesat. Když je na nule, tak pořád ochlazujeme, až dostaneme led. Za chvíli budeme led zahřívat a dostaneme vodu, která se bude ohřívat. • Dobu, kdy se nic s teplotou neděje, nemůžeme prodlužovat, jak chceme. Po určité době se změní skupenství a teplota se začne rovněž měnit.

úspory	čas, velikost úspor	• Máme nějaké úspory, a po určité době začneme pravidelně utrácet. Pak na nějakou dobu přestaneme, a pak začneme spořit. • Nebo taky máme nějaké peníze a musíme platit úroky. Když je zaplatíme, chvíli neděláme s penězi nic, a pak je dáme na účet a oni nám dají úroky. Tak naše peníze rostou.
změny rychlosti	čas, rychlost	• Jedeme po dálnici v „superrychlém“ autě stejnou rychlostí, pak musíme brzdít, abychom jeli menší rychlostí a časem můžeme rychlost zase zvyšovat.