METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Typ úloh: Gradované úlohy

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: prvočísla, čísla složená

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: prvočíslo, číslo složené, dělitel čísla, triviální dělitel

Najděte všechna složená čísla, která jsou větší než 18 a menší než 35.

Řešení

Budeme hledat všechna čísla, která mají aspoň 3 dělitele (včetně triviálních). V daném intervalu existují 4 prvočísla (19, 23, 29, 31). Ostatní čísla jsou složená.

Závěr. Hledaná jsou čísla 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34.

Metodické poznámky
Úloha může sloužit jako samostatná práce.

Úloha 2 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: přirozená čísla, prvočísla, znaky dělitelnosti

Kolik prvočísel je mezi čísly 15, 17, 19, 27, 31, 37, 39, 45, 47, 49, 57 a 59?

Řešení

Úlohu lze řešit tak, že prověříme každé číslo samostatně, ale stačí, když z uvedené množiny vyloučíme čísla, která jsou dělitelná 3, 5 a 7 (Proč není potřeba uvažovat dělení většími prvočísly?), jsou to čísla 15, 27, 39, 45, 49, 57. Zbývající čísla dané množiny jsou řešením úlohy. Jsou to čísla 17, 19, 31, 37, 47, 59.

Závěr. V dané množině je 6 prvočísel.

Metodické poznámky
Úloha může sloužit jako samostatná práce, žáci dokáží určit rozdíl a vlastnosti složených čísel a prvočísel.

Úloha 3 (úroveň 3)
Předpokládané znalosti: prvočíslo, složené číslo

Číslo 66 lze zapsat jako součin tří prvočísel $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$. Zapište toto číslo jako součet tří prvočísel. Najděte všechna řešení.

Řešení

Hledáme všechny trojice prvočísel, jejichž součet je roven 66. V uvedených součtech se vždy bude vyskytovat číslo 2, protože výsledkem je sudé číslo. Proto dvě z čísel musí být lichá. Úloha je převedena na hledání dvou lichých prvočísel, jejichž součet je číslo 64.

Závěr. Platí tak

$$66 = 2 + 3 + 61 = 2 + 5 + 59 = 2 + 11 + 53 = 2 + 17 + 47 = 2 + 23 + 41.$$

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: společný násobek

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: rozklad čísla na součin prvočinitelů, násobek, nejmenší společný násobek, složené číslo, prvočíslo

Určete $\mathrm{n}(90, 105, 140)$.

Řešení

Hledáme nejmenší společný násobek čísel 90, 105 a 140. Provedeme rozklad jednotlivých čísel na součin prvočinitelů. Zjistíme, kolikrát se které prvočíslo vyskytuje v jednotlivých rozkladech. Z jednotlivých počtů vybereme největší, a tolikrát toto prvočíslo uvedeme do výsledného rozkladu

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5, \\ 105 &= 5 \cdot 21 = 3 \cdot 5 \cdot 7, \\ 140 &= 2 \cdot 70 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7. \end{aligned}$$

Závěr. $\mathrm{n}(90, 105, 140) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1\,260$.

Metodické poznámky

Hledání nejmenšího společného násobku skupiny čísel vede žáky k uvědomění si rozkladu složených čísel na součin prvočinitelů, zkráceného zápisu ve tvaru mocniny s prvočíselným základem.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: hledání všech násobků daného čísla, nejmenší společný násobek, prvočíslo, číslo složené

Z autobusového nádraží vyjíždějí přesně v 6 hodin autobusy linek A a B. Autobusy linky A jezdí každých 6 minut, linky B každých 15 minut. V jakých časech mezi 6. a 12. hodinou odjíždějí autobusy obou linek od nádraží současně?

Řešení

Hledáme nejmenší společný násobek čísel 6 a 15. Platí tedy

$$6 = 2 \cdot 3 \quad \text{a} \quad 15 = 3 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{n}(6, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Závěr. Časy společných odjezdů jsou 6:30, 7:00, 7:30, 8:00, 8:30, 9:00, 9:30, 10:00, 10:30, 11:00, 11:30, 12:00.

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce, umožňuje uvědomění si hledání nejmenšího společného násobku skupiny čísel.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: násobek, nejmenší společný násobek, rozklad čísla na součin prvočísel

V hřebčíně chovají stádo koní, které má méně než 100 kusů. Kdyby koně zapřáhli do dvojspřeží, jeden by zůstal nezapřažen. Stejná situace by nastala také při sestavování trojspřeží, čtyřspřeží i pětispřeží. Kolik je v hřebčíně ustájeno koní?

Řešení

Hledáme nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 4, 5, protože koně zapřahujeme do dvojspřeží, trojspřeží, čtyřspřeží a pětispřeží. Protože vždy by zůstal 1 kůň nezapřažen, musíme k tomuto číslu přičíst číslo 1. Platí

$$\mathrm{n}(2,3,4,5)+1=60+1=61.$$

Závěr. V hřebčíně je ustájeno 61 koní.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na určení nejmenšího společného násobku skupiny čísel, následně je třeba provést úvahu a výsledek získaný standardním postupem patřičně upravit.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; `slezakov@seznam.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: společný dělitel a dělitel

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: rozklad přirozených čísel na součin prvočinitelů, znaky dělitelnosti

Určete $D(108, 132, 180)$.

Řešení

Hledáme největší společný dělitel čísel 108, 132, 180. Každé z čísel rozložíme na součin prvočísel. Do výsledného rozkladu zahrneme všechna čísla, která se vyskytují ve všech rozkladech (i vícenásobně).

$$108 = 9 \cdot 12 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2,$$
$$132 = 6 \cdot 22 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11,$$
$$180 = 10 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Závěr. $D(108, 132, 180) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Metodické poznámky
Hledání největšího společného dělitele skupiny čísel vede žáky k uvědomění si rozkladu složených čísel na součin prvočinitelů. Žákům můžeme na tabuli napsat několik úloh k samostatné práci. Viz konec ML.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: hledání všech dělitelů daného čísla

Švadlena potřebuje rozstříhat beze zbytku stuhu dlouhou 88 cm na stejně dlouhé stužky tak, aby jejich délky v centimetrech byly vyjádřeny celými čísly a nebyly kratší než 8 cm. Jak to má udělat?

Řešení

Hledáme všechny dělitele čísla 88. Jsou to čísla 1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88. Čísla 1, 2 a 4 nevyhovují zadání úlohy.

Závěr. Švadlena může stříhat stužky 8 cm, 11 cm, 22 cm, nebo 44 cm.

Metodické poznámky
Úloha může sloužit jako samostatná práce.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: dělitel, největší společný dělitel, rozklad čísla na součin prvočísel

Určete bez dělení všechny dělitele čísla 140, znáte-li rozklad $140 = 4 \cdot 5 \cdot 7$.

Řešení

Číslo 1 není v rozkladu, ale patří mezi triviální dělitele každého čísla. Dalším dělitelem je číslo 2, neboť v rozkladu daného čísla se vyskytuje číslo 4 ($2 \cdot 2 = 4$). Číslo 4 je jistě dalším dělitelem. Dále vytváříme součin dvou čísel, a to z trojice 2, 5, 7, tedy $2 \cdot 5 = 10$ a $2 \cdot 7 = 14$ a $5 \cdot 7 = 35$. Čísla 10, 14 a 35 jsou dalšími děliteli čísla 140.

Uvažujme nyní všechny trojice čísel 2, 5, 7 v jejich součinu, přičemž číslo 2 se může vyskytovat nejvýše dvakrát, ostatní dvě čísla nejvýše jednou. Jsou to $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$, $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$, $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$. Čísla 20, 28 a 70 patří do hledané množiny dělitelů čísla 140.

Taktéž nezapomeneme na číslo 140, které je triviálním dělitelem.

Závěr. Množina všech dělitelů čísla 140 je

$$\{1; 2; 4; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 35; 70; 140\}.$$

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na určování dělitelů čísla jinak než metodou dělení.

Úlohy k procvičení. Určete:

a) $D(7, 14)$ [7];
b) $D(15, 30)$ [15];
c) $D(12, 16)$ [4];
d) $D(25, 35)$ [5];
e) $D(14, 42)$ [14];
f) $D(10, 30, 60)$ [10];

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: čísla soudělná a nesoudělná

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: největší společný dělitel, prvočíslo, čísla soudělná a nesoudělná

Rozhodněte, zda jsou čísla 23, 48 a 60 soudělná.

Řešení

Aby byla daná tři čísla soudělná, musí být jejich největší společný dělitel číslo větší než 1. Nebudeme hledat největšího společného dělitele všech tří čísel, stačí najít jeden společný dělitel, který je však větší než číslo 1.

Číslo 23 je prvočíslo, čísla 48 a 60 jsou složená čísla

$$48 = 2 \cdot 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3,$$
$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Z rozkladů obou čísel je patrné, že číslo 23 není dělitelem žádného z nich.

Závěr. Protože společným dělitelem čísel 23, 48 a 60 není žádné číslo větší než 1, jsou tato tři čísla nesoudělná.

Metodické poznámky
Úloha může sloužit jako samostatná práce. Žáci si uvědomí pojem prvočísla, vlastnosti prvočísel.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: soudělná, nesoudělná čísla, lichá, sudá čísla

Z čísel $6, 7, 8, 12, 14, 15, 20, 21, 22$ vyberte všechny trojice soudělných čísel.

Řešení

Budeme hledat postupně všechny trojice čísel, jejichž největší společný dělitel je větší než 1. Ze skupiny čísel vybereme sudá čísla, tj. $6, 8, 12, 14, 20, 22$ a vytvoříme z nich všechny trojice:

$6, 8, 12,$	$6, 8, 14,$	$6, 8, 20,$	$6, 8, 22,$
$6, 12, 14,$	$6, 12, 20,$	$6, 12, 22,$	$6, 14, 20,$
$6, 14, 22,$	$6, 20, 22,$	$8, 12, 14,$	$8, 12, 20,$
$8, 12, 22,$	$8, 14, 20,$	$8, 14, 22,$	$8, 20, 22,$
$12, 14, 20,$	$12, 14, 22,$	$12, 20, 22,$	$14, 20, 22.$

Těchto trojic je celkem 20. Dále budeme uvažovat trojice, ve kterých jsou právě dvě čísla sudá, a třetí není prvočíslo

$$6, 12, 15, \qquad 6, 12, 21, \qquad \text{(celkem 2 trojice).}$$

Nakonec zbývají dvě trojice, ve kterých je jedno číslo sudé a dvě soudělná lichá, tj.

$$6, 15, 21, \qquad 12, 15, 21.$$

Poslední trojice se skládá ze tří čísel lichých, z nichž jedno je prvočíslo

$$7, 14, 21.$$

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce, umožňuje uvědomění si rozdílu soudělných a nesoudělných čísel.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: soudělná čísla, nesoudělná čísla, prvočísla

Kolika různými způsoby lze zapsat číslo 22 jako součet 2 nesoudělných čísel? K pořadí sčítanců nepřihlížejte.

Řešení

Hledáme všechny dvojice nesoudělných čísel, tj. takové dvojice čísel, jejichž největší společný dělitel je 1. Jedná se o dvojice, které v součtu dávají číslo 22 a obě čísla jsou lichá. Platí tedy

$$1 + 21, \qquad 3 + 19, \qquad 5 + 17, \qquad 7 + 15, \qquad 9 + 13.$$

Závěr. Možných způsobů je právě 5.

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; `slezakov@seznam.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: prvočíselný rozklad, dělitel, nejmenší společný násobek

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: dělitel přirozeného čísla

Ve třídě je celkem 25 žáků a máme 40 bonbónů. Kolika spolužákům je možné je rozdat tak, aby žádný bonbón nezbyl a aby všichni obdarovaní spolužáci dostali stejný počet bonbónů?

Řešení

Bonbónů je celkem 40, které budou rozděleny vždy mezi určitý počet spolužáků tak, aby každý dostal stejný počet bonbónů. Zřejmě celkový počet bonbónů musí být dělitelný počtem spolužáků, mezi které budou bonbóny rozděleny, tedy určíme množinu D_{40} všech dělitelů čísla 40, tedy

$$D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}.$$

Bonbóny zřejmě nemůžeme dát všechny jednomu žákovi, což nevyhovuje zadání, ale ani je rozdělit mezi 40 spolužáků, jelikož ve třídě je pouze 25 žáků.

Závěr. Bonbóny lze rozdělit mezi 2, 4, 5, 8, 10 nebo 20 spolužáků.

Metodické poznámky
Úloha využitelná při zavedení pojmu dělitel přirozeného čísla, ale i při procvičování a opakování učiva zaměřeného na tuto problematiku.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: nejmenší společný násobek

Z téže konečné stanice vyjíždějí ráno v 5 hodin čtyři tramvaje na různé linky. První tramvaj se do této stanice vrací za 30 minut, druhá za 45 minut, třetí za 1 hodinu a čtvrtá za 1 hodinu a 30 minut, všechny tramvaje opět vyjíždějí bez přestávky na své linky. Kdy nejdříve se všechny tramvaje opět setkají?

Řešení

Nejprve uvedeme časové intervaly jízdy pro jednotlivé tramvaje v minutách: první tramvaj 30 minut, druhá tramvaj 45 minut, třetí tramvaj 60 minut, čtvrtá tramvaj 90 minut.

Nejkratší doba, za kterou se všechny tramvaje setkají, odpovídá nejmenšímu společnému násobku časových intervalů jízdy jednotlivých tramvají. Nejmenší společný násobek čísel 30, 45, 60 a 90 tedy je

$$n\,(30,\ 60,\ 80,\ 90) = 180.$$

Tramvaje se ve stanici setkají nejdříve za 180 minut, tj. za 3 hodiny.

Závěr. Tramvaje se ve stanici setkají nejdříve v 8 hodin.

Metodické poznámky

Praktická úloha zaměřená na určení nejmenšího společného násobku. Úlohu je možné modifikovat a využít konkrétních jízdních řádů městské hromadné dopravy.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: prvočíselný rozklad

Žák 2. stupně ZŠ, který se narodil roku 1989, pořádal v den svých narozenin oslavu. Jeho spolužák zjistil, že součin čísel označujících den, měsíc a počet roků, které v tento den dovršil, se rovná číslu označující rok jeho narození. Určete datum jeho narozeninové oslavy.

Řešení

Potřebné údaje zjistíme, pokud číslo 1989 zapíšeme jako součin tří přirozených čísel, z nichž jedno bude vyjadřovat den, druhé měsíc jeho narozenin a třetí jeho věk. Nejprve provedeme prvočíselný rozklad čísla 1989, tj.

$$1989 = 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17.$$

Čísla 13 a 17 ani jejich násobky nevyjadřují měsíc, ve kterém se žák narodil, jejich násobky nevyjadřují ani věk žáka, proto se tento žák narodil v září. Čísla 13 a 17 zřejmě vyjadřují jeho věk a den narození. Vzhledem k tomu, že jde o žáka ZŠ, byl jeho věk 13 let.

Závěr. Narozeninová oslava byla pořádána 17. 9. 2002.

Metodické poznámky

Úloha z oblasti zábavné matematiky využitelné při skupinové práci žáků, při jejím řešení je nutné si uvědomit reálný věk žáka gymnázia.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: dělitelnost.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1994, 100 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Běloun, F. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu: racionální čísla, procenta.* 8. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 254 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Táborský; `ttaborsky@gmk.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: nejmenší společný násobek

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: nejmenší společný násobek několika čísel

Urči nejmenší společný násobek n čísel 108, 180 a 270.

Řešení

$$
\begin{aligned}
n &= \mathrm{n}\,(108, 180, 270)\,,\\
108 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3,\\
180 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \phantom{3 \cdot{}} 5,\\
270 &= 2 \cdot \phantom{2 \cdot{}} 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5,\\
n &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 540.
\end{aligned}
$$

Metodické poznámky

Řešení úlohy vyžaduje pouze využití standardního algoritmu pro hledání nejmenšího společného násobku trojice čísel.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: násobek čísla, nejmenší společný násobek několika čísel

Do naší školy chodí méně než 800 žáků. Žáci připravují taneční vystoupení na oslavu 60. výročí založení školy. V první části tanečního vystoupení tančí v párech, ve druhé části nacvičují salta ve trojicích, ve třetí části zkoušejí sestavy pro sedm žáků ve hvězdicích, na závěr pak připravují akrobatická čísla v desetičlenných skupinách. Všichni žáci se účastní všech částí vystoupení a v žádné skupině nikdy žádný tanečník nechybí ani nepřebývá. Kolik je v naší škole žáků? Najdi všechna řešení.

Řešení

Označíme-li počet žáků naší školy $x < 800$, podle zadání úlohy platí

$$2 \mid x \qquad \wedge \qquad 3 \mid x \qquad \wedge \qquad 7 \mid x \qquad \wedge \qquad 10 \mid x.$$

Přirozené číslo x je tedy dělitelné čísly dva, tři, sedm a deset, proto musí být přirozeným násobkem nejmenšího společného násobku těchto čísel, což je číslo

$$\mathrm{n}\,(2, 3, 7, 10) = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 = 210.$$

Teď najdeme všechna čísla x, která splňují podmínku ze zadání $x < 800$.

k	n	$x = kn$
1	210	210
2	210	420
3	210	630

Závěr. V naší škole může být 210 žáků nebo 420 žáků nebo 630 žáků.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na zřejmé a významné vlastnosti nejmenšího společného násobku: každý společný násobek skupiny čísel je násobkem jejich nejmenšího společného násobku. Pokud se někteří žáci rozhodnou řešit úlohu experimentováním, je pak možné společně porovnat efektivitu experimentálního přístupu a výše uvedeného řešení založeného na využití vlastností dělitelnosti.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: násobek čísla, nejmenší společný násobek několika čísel

Julie sbírá plyšové medvídky. Má jich ve sbírce méně než 1 000. Všechny své medvídky může uspořádat do řad po třech. Kdyby měla o čtyři medvídky méně, mohla by je uspořádat do řad po sedmi. Kdyby všechny medvídky uspořádala do řad po jedenácti, v poslední řadě by tři chyběli. Kolik medvídků má Julie ve své sbírce? Urči všechna řešení.

Řešení

Označíme-li počet všech medvídků $x < 1\,000$, podle zadání úlohy platí

$$3 \mid x \qquad \wedge \qquad 7 \mid (x-4) \qquad \wedge \qquad 11 \mid (x+3)\,.$$

Zkusme najít takové přirozené číslo, u něhož bychom mohli využít všechny zadané podmínky. Zřejmě platí

$$3 \mid x \qquad \Rightarrow \qquad 3 \mid (x+3)\,.$$

Obdobně

$$7 \mid (x-4) \qquad \Rightarrow \qquad 7 \mid ((x-4)+7)\,x \qquad \Rightarrow \qquad 7 \mid (x+3)\,.$$

Přirozené číslo $x+3$, je tedy dělitelné čísly tři, sedm a jedenáct, proto musí být přirozeným násobkem nejmenšího společného násobku těchto čísel, což je číslo

$$\mathrm{n}\,(3,7,11) = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 231.$$

Teď najdeme všechna čísla $x+3$, která splňují podmínku ze zadání $x < 1\,000$.

k	n	$x+3=kn$	x
1	231	231	228
2	231	462	459
3	231	693	690
4	231	924	921

Závěr. Julie může mít ve sbírce 228 medvídků, 459 medvídků, 690 medvídků nebo 921 medvídků.

Metodické poznámky

V řešení úlohy 3 je opět využita vlastnost nejmenšího společného násobku skupiny čísel, na níž je založeno už řešení úlohy 2. V úloze 3 však řešitel využije i další zřejmou vlastnost dělitelnosti: jestliže je nějaké číslo x násobkem čísla p, pak je násobkem čísla p i číslo $x+p$. Řešení úlohy tedy není založeno na znalostech přesahujících rámec RVP ZV, jedná se však o obtížnější úlohu, protože řešitel musí zohlednit více komplexních podmínek a provést několik řešitelských kroků.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: PhDr. Lucie Růžičková; `lucie_ruzickova@seznam.cz`

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: kriteria dělitelnosti, rozklad čísla na prvočinitele, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel

Úloha 1 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: dělitelnost

Matěj řekl Štěpánovi: „Hádej, kolik mám bonbónů. Mám jich méně než sto, a když je srovnám do řad po deseti, dvanácti i patnácti, vždy mi jeden zůstane.“ Kolik má Matěj bonbónů?

Řešení (1. způsob)

Napíšeme násobky čísel 10, 12, 15 menší než 100.

$$
\begin{aligned}
10&:\ 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\\
12&:\ 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\\
15&:\ 15, 30, 45, 60, 75, 90
\end{aligned}
$$

Z přehledu násobků vidíme, že ve všech třech řádcích je číslo 60.

Závěr. Protože Matějovi vždy jeden bonbón zůstane, má $60 + 1 = 61$ bonbónů.

Řešení (2. způsob)

Hledáme nejmenší společný násobek čísel 10, 12 a 15. Čísla rozložíme na součin prvočísel (tzv. kanonický rozklad na prvočinitele)

$$
\begin{aligned}
10 &= 2 \cdot 5,\\
12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3,\\
15 &= 3 \cdot 5,\\
\mathrm{n}(10, 12, 15) &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.
\end{aligned}
$$

Protože Matějovi vždy jeden bonbón zůstane, má $60 + 1 = 61$ bonbónů.

Závěr. Matěj má 61 bonbónů.

Metodické poznámky

Danou úlohu lze řešit oběma způsoby, pro slabší žáky je vhodnější první způsob řešení, pro šikovnější žáky druhý způsob řešení.

Úloha 2 (úroveň 2–3)
Předpokládané znalosti: dělitelnost

Krabička od zápalek má rozměry 12 mm, 36 mm a 48 mm. Krabičky máme poskládat do krabice tvaru krychle. Jaké jsou nejmenší možné rozměry takto zaplněné krabice a kolik krabiček zápalek lze do ní naskládat?

Řešení (1. způsob)

Nejdříve určíme rozměry nejmenší možné krabice tvaru krychle. Napíšeme násobky čísel 12, 36, 48.

12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156
36: 36, 72, 108, 144, 180, 216
48: 48, 96, 144

Z přehledu násobků vidíme, že „první“ společný násobek je číslo 144.

Závěr. Nejmenší krychle bude mít délku hrany 144 mm.

Řešení (2. způsob)

Hledáme nejmenší společný násobek čísel 12, 36 a 48. Čísla rozložíme na součin prvočísel

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3, \\ 36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \\ 48 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \\ \mathrm{n}(12, 36, 48) &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144. \end{aligned}$$

Nejmenší krychle bude mít délku hrany 144 cm.
Nyní spočítáme počet krabiček

$$\begin{aligned} a &= 144 : 12 = 12, \\ b &= 144 : 36 = 4, \\ c &= 144 : 48 = 3. \end{aligned}$$

Počet krabiček je tedy $p = a \cdot b \cdot c = 12 \cdot 4 \cdot 3 = 144$.

Závěr. Krabice má hranu délky 144 mm a lze do ní naskládat 144 krabiček.

Metodické poznámky

Žáci musí nejdříve najít matematický model řešení. Určení nejmenšího společného násobku by měli žáci na této úrovni zvládnout druhým způsobem, slabší žáci mohou tuto úlohu řešit způsobem prvním.

Úloha 3 (úroveň 3)
Předpokládané znalosti: dělitelnost

Do květinářství dovezli 324 bílých, růžových a červených růží. Růžových bylo o 36 více než bílých a červených bylo dvakrát více než bílých. Kolik stejných kytic (stejný počet růží i barev) se dá svázat z těchto růží? Kolik růží jednotlivých barev by bylo v každé kytici? Napište všechny možnosti.

Řešení

Nejdříve vypočítáme počet růží jednotlivých barev.

$$\begin{aligned} &\text{bílých:} && x \\ &\text{růžových:} && x + 36 \\ &\text{červených:} && 2x \end{aligned}$$

Sestavíme tak rovnici a vyřešíme ji

$$x + (x + 36) + 2x = 32.$$

Jejím řešením dostaneme

$$x = 72.$$

Do květinářství tedy dovezli následující počty růží

$$\begin{aligned} &\text{bílých:} && 72 \\ &\text{růžových:} && 72 + 36 = 108 \\ &\text{červených:} && 2 \cdot 72 = 144 \end{aligned}$$

Vypíšeme všechny dělitele jednotlivých počtů do tabulky.

72		108		144	
1	72	1	108	1	144
2	36	2	54	2	72
3	24	3	36	3	48
4	18	4	27	4	36
6	12	6	18	6	24
8	9	9	12	8	18
				9	16
				12	12

Z uvedené tabulky vidíme, že společným dělitelem čísel 72, 108 a 144 jsou čísla: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 a 36 , která udávají možné počty kytic.

Počet růží v jednotlivých kyticích doplníme na základě vypsání dělitelů z předchozí tabulky do přehledné tabulky, která je zároveň *odpovědí na požadovanou otázku*.

Počet kytic	1	2	3	4	6	9	12	18	36
Počet bílých růží	72	36	24	18	12	8	6	4	2
Počet růžových růží	108	54	36	27	18	12	9	6	3
Počet červených růží	144	72	48	36	24	16	12	8	4

Metodické poznámky

Jedná se o úlohu pro nadané žáky, kteří si poradí s výpočtem počtu růží jednotlivých barev a dovedou znalosti o dělitelnosti aplikovat.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál: dílo autora
Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; zatloukalova@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: zlomky

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: početní operace se zlomky

Z 480 chlapců, kteří se zúčastnili dotazníkového šetření, jako nejoblíbenější sport uvedlo dvě pětiny kopanou, pět dvanáctin floorbal, jedna šestnáctina košíkovou a zbývající odbíjenou. Pro kolik chlapců je nejoblíbenějším sportem odbíjená?

Řešení

Kopanou uvedly $\frac{2}{5}$ ze 480 žáků, což je $\frac{2}{5} \cdot 480 = 192$. Floorbal uvedlo $\frac{5}{12}$ ze 480 žáků, což je $\frac{5}{12} \cdot 480 = 200$. Košíkovou uvedla $\frac{1}{16}$ ze 480 žáků, což je $\frac{1}{16} \cdot 480 = 30$. Odbíjenou tedy uvedlo $480 - (192 + 200 + 30) = 58$ žáků.

Závěr. Odbíjená je nejoblíbenějším sportem pro 58 chlapců.

Metodické poznámky
Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým mohou činit potíže numerické výpočty.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: početní operace se zlomky

Ve skladu mají jednu třetinu džusů pomerančových, pět osmnáctin jablečných, dvě devítiny broskvových a 120 džusů rybízových. Kolik kusů džusu je celkem ve skladu?

Řešení

Ve skladu je

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{6+5+4}{18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

pomerančových, jablečných a broskvových džusů. Rybízových pak je $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. Jedna šestina všech džusů je 120, proto počet všech džusů ve skladu je $120 \cdot 6 = 720$.

Závěr. Ve skladu je celkem 720 džusů.

Metodické poznámky
Pro slabší žáky může být problémem pochopit jakou částí je 120 rybízových džusů.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: početní operace se zlomky

Tři sourozenci Šárka, Eliška a Leoš dostali od dědečka jeho sbírku známek. Zjistili, že Leoš si vzal jednu čtvrtinu všech známek, zatímco každá z dívek si vzala o devět známek více než Leoš. Kolik známek dostali dohromady?

Řešení

Leoš si vzal $\frac{1}{4}$ známek. Dívky si vzaly celkem $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ všech známek. Každá z dívek tedy má $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$. Rozdíl mezi každou z dívek a Leošem tak je $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$ a $\frac{1}{8}$ odpovídá 9 známkám, proto všech známek je $9 \cdot 8 = 72$.

Závěr. Sourozenci dostali od dědečka celkem 72 známek.

Metodické poznámky

Pro některé žáky je problém pochopit, že 9 známek odpovídá jedné osmině všech známek.

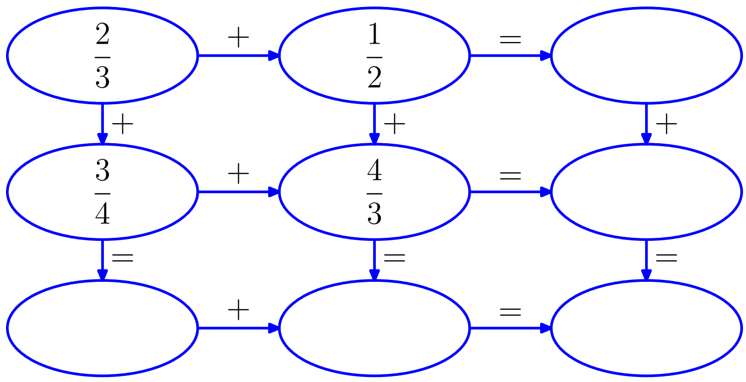
Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; `zatloukalova@gjs.cz`

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: zlomky, rozšiřování a krácení zlomků, sčítání zlomků

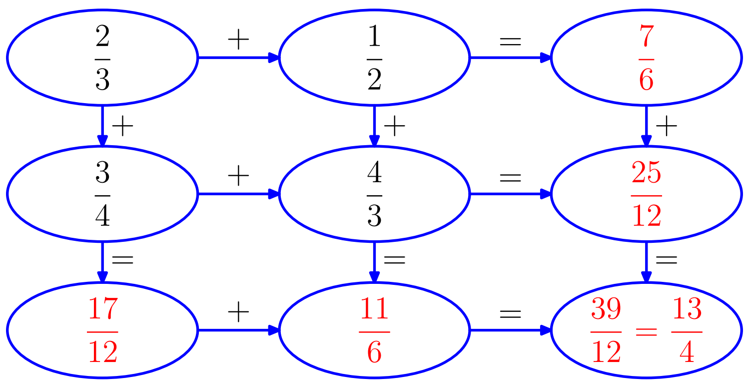
Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: sčítání zlomků, rozšiřování zlomků, krácení zlomků
Pythagoriáda, 1999/2000, školní kolo, 7. ročník, příklad 5

Doplňte do oválů správná čísla (početní výkony provádíme ve směru šipek).



Řešení



Závěr. Hledaným číslem je $\frac{39}{12} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$.

Metodické poznámky

Žáci musí umět sčítat zlomky a v závěru je i krátit. Jako správný výsledek bereme smíšené číslo i zkrácený zlomek.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: odčítání zlomků, práce se zápornými čísly

Pythagoriáda, 2005/2006, školní kolo, 7. ročník, příklad 7

Doplňte další tři členy řady tvořené podle určitého pravidla

$$1;\ \tfrac{1}{3};\ -\tfrac{1}{3};\ -1;\ -\tfrac{5}{3};\ -\tfrac{7}{3};\ -3;\ -\tfrac{11}{3};\ -\tfrac{13}{3};\ -5;\ \bigcirc;\ \bigcirc;\ \bigcirc;\ \dots$$

Řešení

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že člen následující je člen předchozí zmenšený o $\frac{2}{3}$.

Závěr. Doplněná řada má tvar

$$1;\ \tfrac{1}{3};\ -\tfrac{1}{3};\ -1; -\tfrac{5}{3};\ -\tfrac{7}{3};\ -3;\ -\tfrac{11}{3};\ -\tfrac{13}{3};\ -5;\ -\tfrac{17}{3};\ -\tfrac{19}{3};\ -7;\dots$$

Metodické poznámky

Řady čísel patří k oblíbeným úlohám soutěží. V tomto případě nalezení pravidla bylo jednoduché a díky shodným jmenovatelům všech zlomků je i výpočet velmi rychlý.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: sčítání zlomků, odčítání a násobení zlomků

Pythagoriáda, 2000/2001, školní kolo, 7. ročník, příklad 15

Turista šel z jedné vesnice do druhé. Dvě pětiny cesty jel autobusem, třetinu zbytku cesty šel pěšky a do cíle mu zbývají ještě čtyři kilometry. Jak jsou tyto vesnice od sebe vzdáleny?

Řešení

Autobusem ujel $\frac{2}{5}$ cesty, pěšky ušel $\frac{1}{3}$ zbytku cesty, tedy $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$ cesty. Do cíle mu tak zbývají $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ cesty, což jsou podle zadání 4 km. Odtud $\frac{1}{5}$ cesty jsou 2 km. Celá cesta je tedy 10 km.

Závěr. Vesnice jsou vzdáleny 10 km.

Metodické poznámky

Slovní úlohy jsou pro studenty náročnější, protože se u nich musí myslet a není možné použít nějakou univerzální cestu.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek
Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; `ditamf@seznam.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: zlomky, rozšiřování a krácení zlomků, sčítání zlomků

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: sčítání zlomků, násobení zlomků, odčítání desetinných čísel.
Pythagoriáda, 2008/2009, školní kolo, 7. ročník, příklad 15

V nádrži bylo 10 hl nafty. Při dopolední směně se spotřebovala $\frac{1}{4}$ objemu nafty a při odpolední směně $\frac{2}{5}$ zbytku. Kolik litrů nafty bylo v nádrži na konci odpolední směny?

Řešení

V nádrži 10 hl nafty. Dopoledne se spotřebuje $\frac{1}{4}$ objemu, tedy $\frac{1}{4} \cdot 10 = 2{,}5$ hl (zůstane 7,5 hl). Odpoledne $\frac{2}{5}$ zbytku, tedy se spotřebuje $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 = \frac{3}{10} \cdot 10 = 3$ hl. Na konci směny tak zůstane $7{,}5 - 3 = 4{,}5$ hl nafty.

Závěr. Na konci směny zůstane v nádrži 450 l nafty.

Metodické poznámky

Procvičujeme sčítání, odčítání a násobení zlomků. Důležitá je informace „$\frac{2}{5}$ zbytku“. V závěru se nabízí využití zlomků, desetinných čísel i převodů jednotek.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: odčítání zlomků, práce se zápornými čísly.
Pythagoriáda, 2009/2010, školní kolo, 7. ročník, příklad 10

Vypočítejte podíl součtu a rozdílu zlomků $\frac{7}{12}$ a $\frac{17}{16}$.

Řešení

$$\left(\frac{7}{12} + \frac{17}{16}\right) : \left(\frac{7}{12} - \frac{17}{16}\right) = \frac{28+51}{48} : \frac{28-51}{48} = \frac{79}{48} \cdot \left(-\frac{48}{23}\right) = -\frac{79}{23}.$$

Závěr. Podíl je roven zlomku $-\frac{79}{23}$.

Metodické poznámky

Žáci znají pojmy podíl, součet a rozdíl zlomků. Navíc ze slovního zadání musí správně sestavit hledaný číselný výraz.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: sčítání zlomků, odčítání a násobení zlomků.

57. ročník MO (2007/2008), příklad Z7–II–3.

U Nováků napekli svatební koláče. Čtvrtinu zavezli příbuzným na Moravu, šestinu rozdali kolegům v práci a devítinu dali sousedům. Kdyby jim zůstalo o tři koláče více, byla by to polovina původního počtu. Kolik koláčů napekli?

Řešení

Novákovi rozdali $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{9+6+4}{36} = \frac{19}{36}$ koláčů. Polovina koláčů je $\frac{18}{36}$, potom tedy $\frac{1}{36} = 3$ koláče. Napekli $3 \cdot 36 = 108$ koláčů.

Závěr. Novákovi napekli 108 koláčů.

Metodické poznámky

Nejnáročnějším krokem ve výpočtu je uvědomit si, že $\frac{1}{36} = 3$ koláče. Součet zlomků žáci umí a násobení přirozených čísel znají ještě z prvního stupně.

Zdroj: archiv autora,
Matematická olympiáda. [online]. [cit. 2013-01-16]. Dostupné
`http://www.math.muni.cz/mo/Z/main.html`
Obrazový materiál:
Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; `ditamf@seznam.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: procenta, základ

Úloha 1 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: práce s procenty, násobení

Vysavač byl zdražen o 12 % a později o 30 % z nové ceny zlevněn. Jeho cena pak byla 3567,20 Kč. Jaká byla jeho původní cena?

Řešení

3567,20 Kč je 100 % − 30 % = 70 % procent ceny před zlevněním. Proto cena před zlevněním byla $\frac{100}{70} \cdot 3567{,}20 = 5096$ Kč.

Vysavač stál po zdražení 5096 Kč, což je 112 % původní ceny. Proto původní cena byla $y = \frac{100}{112} \cdot 5096 = 4550$ Kč.

Závěr. Původní cena vysavače byla 4550 Kč.

Metodické poznámky
Jedná se o typický příklad z oblasti procent, kdy si žák musí uvědomit, že při výpočtu postupujeme „odzadu“.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: procenta

Čerstvé houby obsahují 90 % vody, sušené obsahují 15 % vody. Nasbírali jsme 12 kg hub. Kolik kilogramů sušených hub z nich získáme?

Řešení

Čerstvé houby o hmotnosti 12 kg obsahují 90 % vody, proto sušina má hmotnost 10 %, tedy $x = 0{,}1 \cdot 12 = 1{,}2$ kg.

Označme hmotnost sušených hub y. Ty obsahují 15 % vody, proto

$$y = \frac{1{,}2}{0{,}85} \doteq 1{,}41 \text{ kg}.$$

Závěr. Získáme asi 1,41 kg sušených hub.

Metodické poznámky
Žáci si musí uvědomit, že každá houba obsahuje vodu a sušinu. Hmotnost sušiny v kilogramech je jediným číslem, které je pevně stanoveno. Přitom to vždy znamená jinou procentovou část. Tento příklad patří k původním příkladům ze sbírky Františka Bělouna.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: procenta, výrazy s proměnnou

Čerstvé houby obsahují 90 % vody, sušené houby obsahují 15 % vody. Kolik procent vody obsažené v čerstvých houbách se sušením odpaří?

Řešení (zvolíme si hmotnost hub)

Čerstvé houby mají hmotnost 10 kg, což je 100 %. Sušina má hmotnost x, což je 10 %, tedy $x = 0{,}1 \cdot 10 = 1$ kg. Voda tvoří 90 % hmotnosti, což je $10 - 1 = 9$ kg.

Suché houby mají hmotnost y, což je 100 %. Jejich sušina má hmotnost 1 kg, což je 85 % jejich hmotnosti, tedy

$$y = \frac{1}{0{,}85} \doteq 1{,}18\,\text{kg}.$$

V nich je tedy $1{,}18 - 1 = 0{,}18$ kg vody.

Odpaří se tedy $8{,}82 : 9 = 0{,}98 = 98\,\%$ vody.

Závěr. Odpaří se přibližně 98 % vody.

Řešení (obecně)

Čerstvé houby mají hmotnost h, což je 100 %. Sušina má hmotnost x, což je 10 %, tedy $x = 0{,}1 \cdot h$. Proto je v nich $h - 0,1h = 0{,}9h$ vody.

Suché houby mají hmotnost y, což je 100 %. Sušina $0{,}1 \cdot h$ tvoří 85 % hmotnosti, proto

$$y = \frac{0{,}1\,h}{0{,}85} \doteq 0{,}118\,h.$$

V nich je $0{,}118\,h - 0{,}1\,h = 0{,}018\,h$ vody.

Odpaří se tedy

$$(0{,}9\,h - 0{,}018\,h) : 0{,}9h = 0{,}882\,h : 0{,}9\,h = 0{,}98 = 98\,\%.$$

Závěr. Odpaří se přibližně 98 % vody.

Metodické poznámky

Tento příklad má pro žáky připravené hned dvě nepříjemnosti. Nejprve žáci automaticky oznámí, že se odpaří 90 % − 15 % = 75 % vody. Když jim trpělivě vysvětlíme, že jde o jiný základ a tímto způsobem se k výsledku nedostaneme, přijde druhý problém. V zadání příkladu chybí konkrétní čísla. Řešit můžeme vhodně zvoleným číslem původní hmotnosti hub nebo obecně. Ukážeme tak žákům důvod, proč procenta vznikla.

Zdroj: archiv autora,
[1] Krupka, P. *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií. 1. díl.* 3., přepracované vydání. Praha: Prometheus, 2002.
[2] Czudek, P. *Slovní úlohy řešené rovnicemi: pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ: 555 úloh.* Praha: HAV, 2005.
Obrazový materiál:
Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; `ditamf@seznam.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: procenta, základ

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: práce s procenty, násobení desetinných čísel

První druh sýra obsahuje 55 % sušiny a 70 % tuku v sušině. Druhý druh sýra obsahuje 60 % sušiny a 75 % tuku v sušině. Kolik gramů tuku sním, když sním od každého druhu 100 g sýra?

Řešení

1. druh sýra obsahuje 55 % sušiny, v ní je 70 % tuku, tedy $0{,}55 \cdot 0{,}70 = 0{,}385$ tuku.
2. druh sýra obsahuje 60 % sušiny, v ní je 75 % tuku, tedy $0{,}60 \cdot 0{,}75 = 0{,}450$ tuku.
Sníme $100\,\text{g} \cdot 0{,}385 + 100\,\text{g} \cdot 0{,}45 = 83{,}5\,\text{g}$ tuku (z 200 g sýra).

Závěr. Sníme celkem 83,5 gramů tuku.

Metodické poznámky
Žáci si musí uvědomit převody procent na desetinná čísla a následně pojem „něco z něčeho“ znamená násobení. Další postup už je mechanický výpočet.

Úloha 2 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: procenta, obsah obdélníku, převody jednotek, řešení rovnic

Obsah obdélníku je $81{,}25\,\text{cm}^2$. Zvětšíme-li jeho délku o 5 mm, zvětší se jeho obsah o 4 %. Určete jeho rozměry.

Řešení

Označme délka obdélníku a, šířka obdélníku b, jeho obsah je $S = ab = 81{,}25\,\text{cm}^2$. Když jeho délku zvětšíme o 5 mm na $a + 0{,}5$ (cm), obsah se zvětší o 4 % na $1{,}04\,ab$.
Řešíme tak soustavu rovnic

$$(a + 0,5) \cdot b = 1{,}04\,ab,$$
$$ab = 81{,}25.$$

Po roznásobení první rovnice do ní můžeme dosadit za ab z rovnice druhé a dostáváme $81{,}25 + 0{,}5b = 1{,}04 \cdot 81{,}25$. Snadno pak dopočítáme řešení $b = 6{,}5$, tedy $a = 12{,}5$.

Závěr. Rozměry obdélníku jsou 6,5 cm a 12,5 cm.

Metodické poznámky

Žáci mají většinou potíže využít vztah pro obsah obdélníku a procenta. Jako největší problém se však jeví nutnost dosadit 81,25 místo součinu ab, protože substituci ještě na základní škole neznají.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procenta, řešení rovnic, pojem koncentrace (z chemie)

Kolik gramů pevného $CuSO_4$ musíme přidat do 450 g 15% roztoku $CuSO_4$, aby vznikl 25% roztok?

Řešení

Označme hmotnost pevného $CuSO_4$, které přidáme, jako x (g) ve 100% koncentraci. Roztok má hmotnost 450 g a koncentraci 15 %. Výsledný roztok bude mít hmotnost $x + 450$ g a koncentraci 25 %.

Dostáváme tak rovnici (v procentech)

$$100x + 15 \cdot 450 = 25\,(x + 450)\,,$$

jejímž řešením je $x = 60$.

Závěr. Musíme přidat 60 g pevného $CuSO_4$.

Metodické poznámky

Největším problémem pro žáky, kteří ještě chemii nemají, je určit koncentraci pevné látky. Rovněž rovnice je potřeba neustále připomínat a opakovat.

Zdroj: archiv autora,
[1] Krupka, P. *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základních škol a nižší ročníky víceletých gymnázií. 1. díl.* 3., přepracované vydání. Praha: Prometheus, 2002.
[2] Czudek, P. *Slovní úlohy řešené rovnicemi: pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ: 555 úloh.* Praha: HAV, 2005.
Obrazový materiál:
Autor: PhDr. Dita Maryšková, Ph.D.; ditamf@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: odhady, procentová část, základ, počet procent

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: procentový počet

Délka toku Labe činí 1 154 km, z toho 358 km je délka toku na území České republiky. Odhadněte a pak vypočtěte, kolik procent toku Labe (z celkové délky) protéká mimo území České republiky?

Řešení

Celková délka toku Labe je 1 154 km. Délka toku Labe na území České republiky je 358 km, pak délka toku Labe mimo území České republiky činí 796 km. 1 % z celkové délky toku Labe je 11,54 km, označme p počet procent % délky toku Labe mimo území České republiky. Potom platí

$$p = \frac{796}{11{,}54}.$$

Po zaokrouhlení na setiny dostaneme $p \doteq 68{,}98$.

Závěr. Délka toku Labe mimo území České republiky činí 796 km, což je přibližně 69 % z celkové délky toku Labe.

Metodické poznámky
Základní úloha zaměřená na určení počtu procent, která je využitelná při procvičování a opakování procentového počtu.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: procentový počet, obsah obdélníku

Obdélníková zahrada s rozměry 80 m a 20 m byla upravena tak, že se její rozměry zmenšily o čtvrtinu. Odhadněte a pak vypočtěte, o kolik m^2 a o kolik procent se zmenšila výměra zahrady?

Řešení

Původní rozměry obdélníkové zahrady označme a_0, b_0, kde $a_0 = 80\,\mathrm{m}$, $b_0 = 20\,\mathrm{m}$. Dále označme a, b rozměry zahrady po jejím zmenšení, zřejmě platí

$$a = \tfrac{3}{4}a_0 = 60\,\mathrm{m} \quad \text{a} \quad b = \tfrac{3}{4}b_0 = 15\,\mathrm{m}.$$

Obsah S_0 zahrady před zmenšením jejich rozměrů určíme dle známého vztahu pro určení obsahu obdélníku, tj.

$$S_0 = a_0 b_0.$$

Po dosazení za $a_0 = 80\,\text{m}$, $b_0 = 20\,\text{m}$ dostaneme $S_0 = 1\,600\,\text{m}^2$.

Obsah S zahrady po zmenšení jejich rozměrů určíme analogicky, tedy

$$S = ab.$$

Po dosazení za $a = 60\,\text{m}$, $b = 15\,\text{m}$ dostaneme $S = 900\,\text{m}^2$.

Výměra zahrady se zmenšila o $700\,\text{m}^2$. Jedno procento z celkové výměry zahrady je $16\,\text{m}^2$, pak pro počet procent p, o kolik se zmenšila zahrada, platí

$$p = \frac{700}{16} = 43{,}75.$$

Závěr. Po zmenšení rozměrů se výměra zahrady zmenšila o $700\,\text{m}^2$, což je $43{,}75\,\%$ z celkové výměry původní zahrady.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřená na procvičení jak procentového počtu, tak metrických vlastností rovinných útvarů. Při řešení úlohy je demonstrován význam absolutní a relativní změny.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: procentový počet, řešení lineárních rovnic

V prvním pololetí prospělo ve třídě 16 chlapců z 18, děvčata prospěla všechna. Ve třídě bylo celkem 95 % prospívajících žáků. Odhadněte a pak vypočtěte, kolik je ve třídě žáků?

Řešení

Ve třídě je 18 chlapců, z nichž 16 prospělo, dále označme x počet děvčat ve třídě, pak celkový počet žáků je $x + 18$, z toho $x + 16$ žáků prospělo. Z celkového počtu žáků 95 % prospělo, tedy platí

$$0{,}95 \cdot (x + 18) = x + 16.$$

Řešením uvedené lineární rovnice je $x = 22$, tedy ve třídě je 22 děvčat.

Závěr. Ve třídě je celkem 40 žáků.

Metodické poznámky

Úlohu je možné zadat jak pro samostatnou práci, tak skupinovou práci s tím, že žáci mohou hledat více způsobů řešení a následně diskutovat výhody jednotlivých způsobů řešení.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: racionální čísla, procenta.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 166 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Běloun, F. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu: racionální čísla, procenta.* 8. vyd. Praha: Prometheus, 2003, 254 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Táborský; `ttaborsky@gmk.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: promile

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: promile

Ve 100 g kakaového nápoje je obsaženo 30 miligramů vitaminu C, 8 miligramů vitaminu PP a 1 miligram vitaminu B_2. Kolik promile vitaminu C, PP i B_2 obsahuje tento nápoj?

Řešení

Určíme množství jednotlivých látek ve 100 g nápoje v promile

30 miligramů C .... 0,3 ‰(30 : 100)
8 miligramůPP .... 0,08 ‰(8 : 100)
1 miligramB_2 .... 0,01 ‰(1 : 100)

Závěr. Kakaový nápoj obsahuje 0,3 ‰ vitaminu C, 0,08 ‰ vitaminu PP a 0,01 ‰ vitaminu B_2.

Metodické poznámky
Úloha může sloužit jako samostatná práce.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: procento, procentová část, základ, trojčlenka, jednotky hmotnosti

Kolik gramů kyseliny benzoové obsahuje 200 gramové balení hořčice, je-li v ní koncentrace kyseliny benzoové 1,5 ‰?

Řešení

1,5 ‰ kyseliny benzoové v hořčici znamená, že v 1 kg hořčice je 1,5 g kyseliny benzoové. V 200 g bude $1{,}5 : 5 = 0{,}3\ g$

Závěr. 200 gramové balení hořčice obsahuje 0,3 g kyseliny benzoové.

Metodické poznámky
Úloha žákům umožňuje seznámení s pojmem promile na příkladu z běžného života.

Úloha 3 (úroveň 3)
Předpokládané znalosti: promile

Ze stanice Železná Ruda (790 m. n. m.) vede železniční trať průměrným stoupáním 15 ‰ do stanice Špičák. Ta je podle mapy vzdálena od Železné Rudy 3 km. Určete nadmořskou výšku stanice Špičák.

Řešení

Průměrné stoupání 15 ‰ značí přírůstek nadmořské výšky 15 m na každých 1000 m vodorovné vzdálenosti. Na 3 km vzdálenosti tedy vystoupáme o $3 \cdot 15 = 45$ m.

$$790\,\mathrm{m} + 45\,\mathrm{m} = 835\,\mathrm{m}$$

Závěr. Nadmořská výška stanice Špičák činí 835 m.

Metodické poznámky
Úloha přináší ukázku mezipředmětové souvislosti matematiky a zeměpisu.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: úrok, úroková míra

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: procento, procentová část, úrok, úroková míra

Pan Novák si půjčil v bance 95 000 Kč. Roční úroková míra činila 14 %. Dluh se mu podařilo splatit najednou právě po 1 roce. Jak velká byla jeho splátka?

Řešení

Pokud si pan Novák půjčil v bance 95 000 Kč, tak za tyto půjčené peníze musí bance zaplatit půjčovné, tzv. úrok. Tento úrok vypočítáme tak, že zjistíme, kolik korun činí 14 % z částky 95 000 Kč. Protože 95 000 Kč je 100 %, 1 % dané částky je 950 Kč, tedy 14 % je $14 \cdot 950 = 13\,300$ Kč. Splátka pak činila $95\,000 + 13\,300$ Kč.

Závěr. Splátka pana Nováka činila 108 300 Kč.

Metodické poznámky
Úloha žákům umožňuje seznámení s pojmy úrok, úroková míra. Je vhodným příkladem aplikace úloh o procentech.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: přirozená čísla, aritmetický průměr

Paní Nováková si uložila na účet částku ve výši 100 000 Kč do banky, která úročí vklady úrokovou mírou 8 %. Peníze si vyzvedla až za 3 roky. Kolik korun činil úrok za tři roky?

Řešení

Zjistíme úrok za první rok, pak určíme stav po prvním roce.

Původní vklad byl 100 000 Kč. Úrok za 1. rok byl $0{,}08 \cdot 100\,000$ Kč $= 8\,000$ Kč, celkem zůstalo na účtu po prvním roce 108 000 Kč.

Pro druhý rok se počítá úrok z částky 108 000 Kč, tedy úrok po druhém roce spoření činí $0{,}08 \cdot 108\,000$ Kč $= 8\,640$ Kč a stav na účtu na konci druhého roku je 116 640 Kč.

Stejným způsobem vypočítáme úrok ve 3. roce, $0{,}08 \cdot 116\,640$ Kč $= 9\,331{,}2$ Kč a paní Nováková měla na konci třetího roku spoření na účtu 125 971,2 Kč, z čehož je úrok 25 971,2 Kč.

Závěr. Úrok paní Novákové za tři roky činil 25 971,2 Kč.

Metodické poznámky
Úloha ukazuje postup výpočtu úroku z částky, která je uložena na dobu delší než 1 rok. Lze se zmínit i o dani z příjmu.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: úrok, úroková míra, úvěr, dluh

Pan Uličný si půjčil v bance 100 000 Kč. Úvěr byl úročen 16 %. Předpokládal, že úvěr splatí do 2 let ve dvou splátkách vždy na konci roku. Na konci prvního roku se mu podařilo splatit 80 000 Kč. Kolik musí zaplatit na konci druhého roku, aby se zbavil celého dluhu?

Řešení

Víme, že po 1. roce dlužil pan Uličný bance 116 000 Kč a zaplatil částku ve výši 80 000 Kč. Tedy ke splacení dluhu mu chybí 36 000 Kč. Úrok z této částky činí 5 760 Kč ($360 \cdot 16 = 5\,760$). Tedy na konci 2. roku musí k částce 36 000 Kč přičíst 5 760 Kč.

Závěr. Pan Uličný na konci 2. roku zaplatí částku 41 760 Kč.

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; `slezakov@seznam.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: rovnice, řešení rovnic o jedné neznámé

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: násobení mnohočlenu mnohočlenem, řešení rovnic, desetinná čísla

Řešte rovnici a proveďte zkoušku

$$0{,}3 \cdot (2 + 3x) = 0{,}6 \cdot (2x - 3).$$

Řešení

Postupnými úpravami dané rovnice máme

$$\begin{aligned} 0{,}3 \cdot (2 + 3x) &= 0{,}6 \cdot (2x - 3), \\ 0{,}6 + 0{,}9x &= 1{,}2x - 1{,}8\,, \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Provedeme zkoušku a ověříme správnost nalezeného výsledku (kořene dané rovnice)

$$\begin{aligned} L &= 0{,}3 \cdot (2 + 3x) = 0{,}3 \cdot (2 + 24) = 7{,}8, \\ P &= 0{,}6 \cdot (2x - 3) = 0{,}6 \cdot 13 = 7{,}8. \end{aligned}$$

Závěr. Kořenem dané rovnice je $x = 8$.

Metodické poznámky
Jedná se o úlohu základní úrovně, přesto žáci často chybují při řešení rovnic s desetinnými čísly. V této sérii se zaměříme na řešení rovnic, kdy je nutno roznásobit závorku.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: počítání se zlomky, ekvivalentní úpravy

Vyřešte danou rovnici a proveďte zkoušku

$$\frac{4}{3}\left(5 - \frac{3}{8}x\right) = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{2x}{3}\right).$$

Řešení

Nejprve vynásobíme obě strany rovnice číslem 6

$$8\left(5-\frac{3x}{8}\right)=3\left(5-\frac{2x}{3}\right).$$

Rovnici upravíme

$$\begin{aligned} 40-3x&=15-2x,\\ x&=25. \end{aligned}$$

Zkouška

$$\begin{aligned} L&=\frac{4}{3}\left(5-\frac{3}{8}x\right)=\frac{4}{3}\left(5-\frac{3}{8}\cdot 25\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{40}{8}-\frac{75}{8}\right)=\\ &-\frac{4}{3}\left(-\frac{35}{8}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{35}{2}\right)=-\frac{35}{6},\\ P&=\frac{1}{2}\left(5-\frac{2x}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(5-\frac{2}{3}\cdot 25\right)=\frac{1}{2}\left(5-\frac{50}{3}\right)=\\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{3}-\frac{50}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{35}{3}\right)=-\frac{35}{6}. \end{aligned}$$

Závěr. Kořenem dané rovnice je $x=25$.

Metodické poznámky

Pro žáky se jedná o náročnější řešení rovnic se zlomky, pro snadnější přípravu učitele uvádíme celé provedení zkoušky.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kalorimetrická rovnice, řešení rovnic

Smícháme 3 litry vody o teplotě 100 °C a 5 litrů vody o teplotě 20 °C. Jaká bude teplota směsi?

Řešení

Fyzikální řešení: množství tepla, které teplejší voda odevzdala vodě chladnější se má rovnat množství tepla, které chladnější voda přijala od teplejší vody. Tepelná výměna probíhá do vyrovnání teplot.

Teplejší voda	**Chladnější voda**
objem vody 3 litry	objem vody 5 litrů
hmotnost vody $m_1=3\,\mathrm{kg}$	hmotnost vody $m_2=5\,\mathrm{kg}$
počáteční teplota $t_1=100\,^\circ\mathrm{C}$	počáteční teplota $t_2=20\,^\circ\mathrm{C}$

Směs teplé a studené vody

Teplota směsi $x=\,?$

V MFCH tabulkách pro ZŠ v tabulce F 11 „Měrná tepelná kapacita“ vyhledáme měrnou tepelnou kapacitu vody $c = 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg \cdot {}^\circ C)}$.

Dosadíme do kalorimetrické rovnice

$$\begin{aligned} c \cdot m_1(t_1 - x) &= c \cdot m_2(x - t_2), \\ 4{,}2 \cdot 3 \cdot (100 - x) &= 4{,}2 \cdot 5 \cdot (x - 20), \\ 12{,}6 \cdot (100 - x) &= 21 \cdot (x - 20), \\ x &= 50\,^\circ\mathrm{C}. \end{aligned}$$

Závěr. Vypočítaná teplota směsi je $x = 50\,^\circ\mathrm{C}$, tepelné ztráty neuvažujeme.

Zkouška: Teplo, které teplejší voda odevzdala vodě chladnější

$$Q = c \cdot m_1 \cdot (t_1 - x) = 4{,}2 \cdot 3 \cdot (100 - 50) = 12{,}6 \cdot 50 = 630\,\mathrm{kJ}.$$

Teplo, které chladnější voda přijala od teplejší vody

$$Q = c \cdot m_2 \cdot (t_2 - x) = 4{,}2 \cdot 5 \cdot (50 - 20) = 21 \cdot 30 = 630\,\mathrm{kJ}.$$

Tepelná výměna probíhala do vyrovnání teplot. Tepelné ztráty a změny objemu neuvažujeme.

Metodické poznámky

V této úloze procvičíme získané vědomosti týkající se řešení rovnic a využijeme znalosti z výuky fyziky.

Zdroj: archiv autorky,
Kolářová, R. *Tabulky pro základní školu.* Praha: Prometheus, 1994.
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Slavomíra Schubertová, Ph.D.; `sschubertova@email.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: rovnice

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: rovnice, ekvivalentní úpravy

Řešte rovnici $5x - (2x - 3) - 4(x - 9) = x + 11$ a proveďte zkoušku.

Řešení

Uvedená rovnice obsahuje výrazy zapsané pomocí závorek. Rovnici začneme řešit tak, že odstraníme závorky. Uvědomíme si, kdy se mění znaménko výrazu v závorce (pokud se před závorkou vyskytuje znaménko mínus). Platí tedy

$$5x - 2x + 3 - 4x + 36 = x + 11.$$

Dále postupujeme tak, že na jedné straně rovnice necháme výrazy s proměnnou x a konstanty převedeme na stranu druhou

$$\begin{aligned} -2x &= -28, \\ x &= 14. \end{aligned}$$

Zkouška.

$$\begin{aligned} &L = 5 \cdot 14 - (2 \cdot 14 - 3) - 4(14 - 9) = 70 - 25 - 4 \cdot 5 = 25, \\ &P = 14 + 11 = 25, \\ &L = P. \end{aligned}$$

Metodické poznámky

Úloha může sloužit jako samostatná práce.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rovnice, ekvivalentní úpravy, zlomky, nejmenší společný násobek

Řešte rovnici a proveďte zkoušku

$$1 - \frac{x+2}{5} = 2x - \frac{2x-1}{3} + \frac{x}{15}.$$

Řešení

Jedná se o rovnici se zlomky. Rovnici budeme řešit tak, že odstraníme zlomky vynásobením obou stran rovnice nejmenším společným jmenovatelem zlomků a upravíme.

$$\begin{aligned}15-3(x+2)&=30x-5(2x-1)+x,\\ 9-3x&=21x+5,\\ x&=\tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

Zkouška.

$$\begin{aligned}&L=1-\frac{\frac{1}{6}+2}{5}=1-\frac{\frac{1}{6}+\frac{12}{6}}{5}=1-\frac{13}{30}=\frac{17}{30},\\ &P=2\cdot\frac{1}{6}-\frac{2\cdot\frac{1}{6}-1}{3}+\frac{\frac{1}{6}}{15}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{90}=\frac{17}{30},\\ &L=P.\end{aligned}$$

Metodické poznámky

Zkouška rovnice je vhodným příkladem na procvičení práce se složenými zlomky.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rovnice, ekvivalentní úpravy, zlomky

Řešte rovnici a proveďte zkoušku

$$\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x+2}{3}+3\right)+3\right)+10\right]-1\right\}=3.$$

Řešení

Rovnici řešíme tak, že postupně odstraňujeme závorky.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x+2}{3}+3\right)+3\right)+10\right]-1\right\}&=3,\\ \frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x+11}{3}\right)+3\right)+10\right]-1\right\}&=3,\\ \frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{x+11}{12}+3\right)+10\right]-1\right\}&=3,\\ \frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{x+47}{12}\right)+10\right]-1\right\}&=3,\\ \frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{5}{6}\cdot\left[\frac{x+47}{30}+10\right]-1\right\}&=3,\\ \frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{5x+347\cdot 5}{180}-1\right\}&=3,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3} \cdot \frac{5x + 1735 - 180}{180} &= 3, \\
5x + 1555 &= 9 \cdot 180, \\
5x &= 1620 - 1555, \\
x &= 13.
\end{aligned}
$$

Zkouška.

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{13+2}{3} + 3 \right) + 3 \right) + 10 \right] - 1 \right\} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{24}{3} \right) + 3 \right) + 10 \right] - 1 \right\} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{5}{6} \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot (2 + 3) + 10 \right] - 1 \right\} = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{5}{6} \cdot 12 - 1 \right\} = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3, \\
P &= 3, \\
L &= P.
\end{aligned}
$$

Metodické poznámky

Zkouška řešení dané rovnice může sloužit jako procvičení práce s číselnými výrazy.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: soustava rovnic

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: soustava rovnic, ekvivalentní úpravy, sčítací metoda

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku

$$x + 5y = 25,$$
$$2x - 7y = -18.$$

Řešení

Soustavu budeme řešit sčítací metodou, tj. vynásobením jedné rovnice libovolným reálným číslem a přičtením k rovnici druhé získáme jednu rovnici o jedné neznámé. Vynásobíme první rovnici -2 a přičteme ke druhé rovnici, dostaneme

$$-17y = -68, \quad \text{tedy} \quad y = 4.$$

Dosazením do první rovnice za neznámou y získáme x.

$$x = 25 - 5 \cdot 4 = 5.$$

Zkouška.

$$\begin{aligned} L_1 &= 5 + 5 \cdot 4 = 25, \\ P_1 &= 25, \\ L_1 &= P_1, \\ L_2 &= 2 \cdot 5 - 7 \cdot 4 = 10 - 28 = -18, \\ P_2 &= -18, \\ L_2 &= P_2. \end{aligned}$$

Závěr. Řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých je uspořádaná dvojice čísel $(x; y) = (5; 4)$.

Metodické poznámky
V rámci řešení úlohy může vyučující seznámit žáky s dalšími metodami řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, a to dosazovací metodou nebo srovnávací metodou.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: soustava rovnic, ekvivalentní úpravy, práce se zlomky, nejmenší společný násobek

Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku

$$\begin{aligned}\frac{2x-y}{2} &= 1-\frac{10x+y}{4},\\ \frac{y-3x}{5}-1 &= \frac{y-6x}{10}.\end{aligned}$$

Řešení

Soustavu řešíme tak, že nejprve z obou rovnic odstraníme zlomky vynásobením nejmenším společným násobkem

$$\begin{aligned}\frac{2x-y}{2} &= 1-\frac{10x+y}{4}, && \Big/\cdot 4\\ \frac{y-3x}{5}-1 &= \frac{y-6x}{10}. && \Big/\cdot 10\end{aligned}$$

Po roznásobení závorek platí

$$\begin{aligned}4x-2y &= 4-10x-y,\\ 2y-6x-10 &= y-6x.\end{aligned}$$

Úpravou obou rovnic dostaneme řešení $x=1$, $y=10$.

Zkouška.

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{2\cdot 1-10}{2} = -4,\\ P_1 &= 1-\frac{10\cdot 1+10}{4} = -4,\\ L_1 &= P_1,\\ L_2 &= \frac{10-3\cdot 1}{5}-1 = \frac{2}{5},\\ P_2 &= \frac{10-6\cdot 1}{10} = \frac{2}{5},\\ L_2 &= P_2.\end{aligned}$$

Závěr. Řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých je uspořádaná dvojice čísel $(x;y)=(1;10)$.

Metodické poznámky

Žáky můžeme upozornit, že geometrickým významem řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je bod v rovině jako společný průsečík dvou přímek.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: soustava rovnic, ekvivalentní úpravy, zlomky, nejmenší společný násobek, substituční metoda

Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{3}{y}&=\frac{11}{12},\\ \frac{2}{x}-\frac{1}{y}&=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Řešení

Soustavu řešíme tak, že zavedeme nové proměnné (substituce). Položíme $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$. Pak platí

$$\begin{aligned}a+3b&=\tfrac{11}{12},\\ 2a-b&=\tfrac{1}{12}.\end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme např. dosazovací metodou. Z první rovnice vyjádříme neznámou a, pak dosadíme do rovnice druhé. Získáme jednu rovnici o jedné neznámé b a tu dále řešíme

$$\begin{aligned}2\left(\frac{11}{12}-3b\right)-b&=\frac{1}{12},\\ 22-72b-12b&=1,\\ b&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Dále dopočítáme proměnnou a dosazením do rovnice $a=\frac{11}{12}-3b$ za b, odkud $a=\frac{1}{6}$. Původní soustava měla neznámé x, y. Proto dosazením do substituce získáme řešení dané soustavy

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\ \Leftrightarrow\ x=6 \quad \text{a} \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{4}\ \Leftrightarrow\ y=4.$$

Závěr. Řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých je uspořádaná dvojice čísel $(x;y)=(6;4)$.

Metodické poznámky

Žáky můžeme upozornit na zajímavost, že při řešení soustavy rovnic o dvou a více neznámých někdy využíváme zavedení nových proměnných pro zjednodušení dané situace. Úloha překračuje rámec RVP ZV, může být využita v rámci rozšiřujícího učiva.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; `slezakov@seznam.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: slovní úlohy řešené rovnicemi

Úloha 1 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: řešení rovnic

Za tři dny ušli žáci na výletě 50 km. První den ušli o 6 km více jako třetí den, druhý den ušli o 2 km více než první den. Kolik km žáci ušli v jednotlivých dnech?

Řešení

Jako neznámou x označíme délku trasy, kterou žáci ušli třetí den.

První den ušli $x + 6$, druhý den $(x + 6) + 2 = x + 8$, třetí den x, celkem 50. Podle zadání sestavíme rovnici a vyřešíme ji

$$\begin{aligned}(x + 6) + (x + 8) + x &= 50,\\ 3x &= 36,\\ x &= 12.\end{aligned}$$

Dopočítáme délku trasy pro jednotlivé dny. První den ušli $12 + 6 = 18$ km, druhý den $(12 + 6) + 2 = 20$ km a třetí den 12 km.

Kontrola správnosti výpočtu: $18 + 20 + 12 = 50$.

Závěr. První den žáci ušli 18 km, druhý den 20 km a třetí den 12 km.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže vybrat, co si mají označit jako neznámou.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: řešení rovnic, zlomky, procenta

Čtyřicet procent ovocného sadu jsou jabloně, jedna třetina stromů jsou třešně. Zbývajících 32 stromů jsou hrušky. Kolik stromů je v sadu?

Řešení

Jako neznámou x označíme počet stromů v sadu, potom jabloní je $0{,}4x$, třešní $\frac{1}{3}x$ a hrušek je 32. Podle zadání sestavíme rovnici a vyřešíme ji

$$\begin{aligned}0{,}4x + \frac{x}{3} + 32 &= x,\\ 1{,}2x + x + 96 &= 3x,\\ x &= 120.\end{aligned}$$

Dopočítáme počet jednotlivých druhů stromů. Jabloní je $0{,}4 \cdot 120 = 48$, třešní $\frac{1}{3} \cdot 120 = 40$ a hrušek 32, celkem tedy 120 stromů.

Závěr. V sadu je 120 stromů.

Metodické poznámky

Pro slabší žáky může být problémem pochopit, jak si označit neznámou a poradit si s údaji o procentech a zlomcích.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: řešení rovnic, procenta, obvod čtverce

Je dán čtverec o straně a. Jestliže jeho stranu prodloužíme o 20 %, zvětší se obvod čtverce o 12 cm. Určete délky stran původního i zvětšeného čtverce.

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje pro stranu čtverce a jeho obvod.

	strana	obvod
Původní čtverec	a	$4a$
Zvětšený čtverec	$1{,}2a$	$4 \cdot 1{,}2a = 4{,}8a$

Z tabulky je možné sestavit rovnici (větší čtverec má o 12 cm delší obvod).

$$4a + 12 = 4{,}8a \quad \Rightarrow \quad a = 15\,\text{cm}.$$

Odtud délka strany zvětšeného čtverce je 18 cm.

Závěr.
Původní čtverec má délku strany 15 cm, zvětšený čtverec má délku strany 18 cm.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit sestavení rovnice, pro slabší také pochopení textu příkladu.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; `zatloukalova@gjs.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: slovní úlohy, rovnice

Úloha 1 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: rovnice, ekvivalentní úpravy

Je dán zlomek, jehož základní tvar je $\frac{5}{3}$. Odečteme-li od jeho čitatele i od jmenovatele číslo 6, vyjde zlomek, který je roven číslu 3. Určete původní tvar zlomku.

Řešení

Hledaný zlomek má tvar $\frac{5k}{3k}$. Podle podmínek platí

$$\frac{5k-6}{3k-6} = 3.$$

Získali jsme lineární rovnici s neznámou k

$$5k - 6 = 3(3k - 6).$$

Jejím řešením dostaneme $k = 3$.

Závěr. Hledaný zlomek má tvar $\frac{15}{9}$.

Metodické poznámky
Žáci mohou řešit úlohu „zkusmo“.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice, pravoúhlý trojúhelník, obsah trojúhelníku

Vypočtěte obsah pravoúhlého trojúhelníku, jehož delší odvěsna je o 3 cm kratší než přepona a o 3 cm delší než kratší odvěsna.

Řešení

Ze zadání označíme délku jedné strany trojúhelníku za neznámou, a to délku přepony x (nejdelší strana). Potom delší odvěsna má délku $(x-3)$ cm a kratší odvěsna má délku $(x-6)$ cm. Podle Pythagorovy věty platí

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (x-6)^2 &= x^2,\\ x^2 - 6x + 9 + x^2 - 12x + 36 &= x^2,\\ x^2 - 18x + 45 &= 0.\end{aligned}$$

Získali jsme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme vzorcem pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{18+12}{2} = 15 \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{18-12}{2} = 3.$$

Pro $x_1 = 3$ dostaneme délky stran trojúhelníku 0, resp. -6, což nemá smysl. Proto řešením je kořen 15 a délky zbývajících dvou odvěsen jsou rovny číslům 9 a 12.

Dále vypočítáme obsah trojúhelníku. Protože se jedná o pravoúhlý trojúhelník, tak vynásobíme mezi sebou obě odvěsny a dělíme číslem 2. Pak platí

$$S = \frac{12 \cdot 9}{2} = 54\,\mathrm{cm}^2.$$

Závěr. Obsah pravoúhlého trojúhelníku je $54\,\mathrm{cm}^2$.

Metodické poznámky

Žáci mohou zvolit za neznámou i délku kterékoli odvěsny. Úloha překračuje rámec RVP ZV, může být využita v rámci rozšiřujícího učiva.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rovnice s neznámou ve jmenovateli, kvadratické rovnice, úlohy o pohybu, ekvivalentní úpravy, práce se zlomky

Lyžař měl uběhnout trasu 30 km. Protože vyběhl o 3 minuty později, než plánoval, musel by zvýšit svou rychlost o 1 km/h, aby dorazil do cíle v plánovaný okamžik. Určete, jakou rychlostí lyžař zamýšlel běžet.

Řešení

Budeme uvažovat situaci, kdy lyžař chtěl vyběhnout v plánovanou dobu a kdy opravdu vyběhl.

chtěl vyběhnout	vyběhl
$v_1 = x\,\mathrm{km/h}$	$v_2 = (x+1)\,\mathrm{km/h}$
$t_1 = \frac{30}{x}\,\mathrm{h}$	$t_2 = \frac{30}{x+1}\,\mathrm{h}$

Dále sestavíme rovnici, ve které vyjádříme dobu, kdy chtěl lyžař opravdu vyběhnout

$$\frac{30}{x} = \frac{30}{x+1} + \frac{1}{20},$$
$$600x + 600 = 600x + x^2 + x,$$
$$x^2 + x - 600 = 0.$$

Získali jsme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme vzorcem pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1+49}{2} = 24 \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-1-49}{2} = -25.$$

Podmínkám úlohy vyhovuje kladný kořen, protože záporná rychlost nemá smysl.

Závěr. Lyžař zamýšlel běžet rychlostí 24 km/h.

Metodické poznámky

Úloha přináší ukázku mezipředmětové souvislosti matematiky a fyziky. Úloha překračuje rámec RVP ZV, může být využita v rámci rozšiřujícího učiva.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; slezakov@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: slovní úlohy, rovnice, poměr

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: poměr, řešení rovnic

Tomáš má mladší sestru Martinu. Poměr věku Martiny, Tomáše a jejich dědečka je $2:3:13$. Kolik let je dědečkovi a kolik let je Martině, jestliže Tomáš má 15 let?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje o věku.

Martina	Tomáš	dědeček
$2x$	$3x$	$13x$
?	15	?

Z údajů o Tomášovi sestavíme rovnici $3x = 15$. Jejím řešení je $x = 5$.
Z tabulky dopočítáme věk Martiny a dědečka.

Závěr. Dědečkovi je 65 let a Martině 10 let.

Metodické poznámky
Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, někteří ji vyřeší úvahou bez zapisování zpaměti.

Úloha 2 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: řešení rovnic

Babička je pětkrát starší než její vnučka Bětka. Dohromady je jim 72 let. Kolik let je babičce?

Řešení

Jako neznámou x označme věk Bětky, věk babičky je pak $5x$, celkem tedy 72 let. Sestavíme rovnici a vyřešíme ji.

$$x + 5x = 72 \quad \Rightarrow \quad x = 12.$$

Pokud je Bětčin věk 12 let, musí být babičce $5 \cdot 12 = 60$ let.
Kontrola správnosti výpočtu $60 + 12 = 72$.

Závěr. Babičce je 60 let.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže vybrat, co si mají označit jako neznámou.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení rovnic

Před několika lety slavil Pepík své deváté narozeniny ve stejný den, kdy jeho dědeček oslavoval svých 57 let. Před kolika lety to bylo, jestliže dnes, kdy oba opět slaví narozeniny, je dědeček čtyřikrát starší než Pepík?

Řešení

Jako neznámou x zvolíme počet let mezi oslavami devátých narozenin a dneškem. Do přehledné tabulky si doplníme údaje o věku.

	dědeček	Pepík
dnes	$57 + x$	$9 + x$
před x lety	57	9

Z tabulky je možné sestavit následující rovnici (dědeček je dnes čtyřikrát starší než Pepík).

$$
\begin{aligned}
57 + x &= 4(9 + x),\\
57 + x &= 36 + 4x,\\
x &= 7.
\end{aligned}
$$

Kontrola správnosti výpočtu (doplněním do tabulky): $64 : 16 = 4$.

Závěr. Dědeček oslavil svých 57 let a Pepík své deváté narozeniny před 7 lety.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit sestavení rovnice, pro slabší také pochopení textu úlohy.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; `zatloukalova@gjs.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: slovní úlohy, lineární rovnice

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: řešení lineárních rovnic

Kolik kilometrů urazil Martin s rodiči při cestě na dovolenou, když $\frac{3}{4}$ cesty letěli letadlem, $\frac{1}{5}$ cesty pluli lodí a zbylých 60 km urazili autobusem?

Řešení

Jako neznámou x zvolíme celou délku Martinovy cesty v kilometrech. Letadlem letěli $\frac{3}{4}$ cesty, tj. $\frac{3}{4}x$ km, lodí pluli $\frac{1}{5}$ cesty, tedy $\frac{1}{5}x$ km. Autobusem urazili 60 km. Celkem urazili $\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x + 60\right)$ km, pak platí

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x + 60 = x.$$

Řešením rovnice je $x = 1\,200$.

Závěr. Při cestě na dovolenou urazil Martin s rodiči celkem 1 200 km.

Metodické poznámky
Úloha zaměřená na procvičení lineárních rovnic a zlomků, kterou je možné také řešit úsudkem.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: řešení lineárních rovnic

Určete, za jak dlouho gepard dohnal gazelu od okamžiku, kdy gazela byla od geparda vzdálena 80 m. Gepard běžel průměrnou rychlostí $108\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ a gazela 72 km/h.

Řešení

Za neznámou zvolíme čas t v sekundách, za který gepard dohnal gazelu. Označme x dráhu v metrech, kterou urazila gazela, než ji gepard dohnal, gepard tedy urazil dráhu $(x + 80)$ m. Průměrné rychlosti gazely a geparda v metrech za sekundu po řadě jsou 20 m/s a 30 m/s.

Gepard se pohyboval po dobu $\left(\frac{x+80}{30}\right)$ s a gazela $\left(\frac{x}{20}\right)$ s, pak z rovnosti dob pohybů plyne

$$\frac{x + 80}{30} = \frac{x}{20}.$$

Řešením této rovnice je $x = 160$. Odtud dráha, kterou urazila gazela je 160 m.

Průměrná rychlost gazely je 20 m/s a dráha, kterou urazila gazela, než ji gepard dohnal, je 160 m, tedy gepard dohnal gazelu za 8 s.

Závěr. Gepard dohnal gazelu za 8 s.

Metodické poznámky

Základní slovní úloha o pohybu, při jejím řešení můžeme diskutovat odlišnost fyzikálního přístupu. Úlohu je také možné řešit úsudkem.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: úpravy algebraických výrazů, základní vztah mezi dráhou rychlostí a časem

Dva cyklisté vyjeli současně ze stejného místa na výlet. Oba ujeli stejnou vzdálenost a vrátili se domů ve stejný okamžik. Cestou oba odpočívali. První jel dvakrát déle, než druhý odpočíval, a druhý jel čtyřikrát déle, než odpočíval první. Který z nich jel rychleji a kolikrát?

Řešení

Označme po řadě o_1, t_1 dobu odpočinku a dobu jízdy prvního cyklisty. Podobně o_2, t_2 je doba odpočinku a doba jízdy druhého cyklisty. Oba cyklisté vyjeli současně a vrátili se ve stejný okamžik, pak platí

$$t_1 + o_1 = t_2 + o_2. \tag{1}$$

První cyklista jel dvakrát déle, než druhý odpočíval, tj. $t_1 = 2o_2$, pak $o_2 = \frac{t_1}{2}$. Druhý cyklista jel čtyřikrát déle, než odpočíval první, tedy $t_2 = 4o_1$, pak $o_1 = \frac{t_2}{4}$. Po dosazení do rovnice (1) za $o_1 = \frac{t_2}{4}$ a $o_2 = \frac{t_1}{2}$ dostaneme

$$t_1 + \frac{t_2}{4} = t_2 + \frac{t_1}{2},$$

odtud $t_1 = 1{,}5t_2$. Doba jízdy prvního cyklisty je 1,5krát větší než doba jízdy druhého cyklisty. Oba cyklisté urazili stejnou dráhu. Pak rychlost druhého cyklisty je 1,5krát větší než rychlost prvního cyklisty.

Závěr. Druhý cyklista jel 1,5krát větší rychlostí než první cyklista.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je provedeno obecně, tedy lze ji využít i při procvičování algebraických úprav výrazů. Při řešení využíváme mezipředmětových vztahů s fyzikou. Závěrečnou úvahu lze nahradit vyjádřením poměrů průměrných rychlostí obou cyklistů.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: rovnice a jejich soustavy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 141 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Táborský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: slovní úlohy o pohybu

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: početní operace s desetinnými čísly

Ze dvou míst vzdálených 24 km vyrazili současně proti sobě po téže cestě chodec rychlostí 4 km/h a cyklista. Setkali se za 1,5 hodiny. Vypočítejte rychlost cyklisty.

Řešení

Chodec ušel za 1,5 hodiny $4 \cdot 1{,}5 = 6\,\mathrm{km}$. Cyklista ujel $24 - 6 = 18\,\mathrm{km}$, rychlost cyklisty tak je $18 : 1{,}5 = 12\,\mathrm{km/h}$.

Závěr. Rychlost cyklisty je 12 km/h.

Metodické poznámky
Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže výpočet rychlosti cyklisty.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: řešení rovnic

Matěj bydlí v Kozlíkově a jezdí na kole za kamarádem Šimonem, který je z Vepříkova. Cesta mu trvá průměrně 30 minut. Jednou musel jít pěšky a trvalo mu to dvě hodiny. Jak daleko od sebe bydlí Matěj a Šimon, když Matějova rychlost při jízdě na kole je o 15 km/h větší, než když jde pěšky?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje pro rychlost, čas a dráhu.

	Rychlost km/h	Čas h	Dráha km
pěšky	x	2	$2x$
na kole	$x + 15$	0,5	$0{,}5(x + 15)$

Z tabulky je možné sestavit rovnici (dráha pěšky i dráha na kole je stejná)

$$\begin{aligned} 2x &= 0{,}5(x + 15), \\ 1{,}5x &= 7{,}5, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Závěr. Matěj a Šimon bydlí od sebe 10 km.

Metodické poznámky

Pro slabší žáky může být problémem pochopit sestavení rovnice.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: řešení rovnic

Z Bukova do Javorova je 18 km. V 10 hodin vyjel z Bukova do Javorova autobus rychlostí 54 km/h. O 20 minut dříve vyjela na kole z Javorova Tereza na návštěvu ke své kamarádce do Bukova rychlostí 18 km/h. Jela po stejné trase jako autobus, ale opačným směrem. V kolik hodin se s autobusem potkala? Jak daleko od Javorova to bylo?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje pro rychlost, čas a dráhu.

	Rychlost km/h	Čas h	Dráha km
autobus	54	x	$54x$
Tereza	18	$x+\frac{1}{3}$	$18\left(x+\frac{1}{3}\right)$

Z tabulky je možné sestavit rovnici (součet dráhy autobusu a dráhy Terezy na kole je 18 km)

$$54 + 18\left(x+\frac{1}{3}\right) = 18 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}.$$

Tereza potkala autobus 9 km od Javorova (přesně v polovině trasy)

Čas, kdy se potkala Tereza s autobusem, určíme například z času autobusu (jedna šestina hodiny je 10 minut): Přičteme k 10 hodinám 10 minut, což je 10:10 h.

Závěr. Tereza se s autobusem potkala v 10:10 h ve vzdálenosti 9 km od Javorova.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit sestavení rovnice, pro slabší také výpočet požadovaného času (převody z hodin na minuty a naopak).

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; `zatloukalova@gjs.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: slovní úlohy o společné práci, lineární rovnice

Úloha 1 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: řešení lineárních rovnic

První dělník by vykopal příkop pro vodovodní potrubí za 4 hodin. Druhý dělník by tento příkop vykopal za 6 hodin. Jak dlouho by trvalo vykopání tohoto příkopu, kdyby oba dělníci pracovali společně?

Řešení

Označme x neznámý počet hodin, po který by oba kopáči museli pracovat společně, aby vykopali celý příkop. První kopáč by za hodinu vykopal $\frac{1}{4}$ příkopu, za x hodin by vykopal $\frac{1}{4}x$ příkopu. Obdobně druhý kopáč by za hodinu vykopal $\frac{1}{6}$ příkopu, za x hodin by vykopal $\frac{1}{6}x$ příkopu. Pak oba společně by za x hodin vykopali $\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x\right)$ příkopu, odtud

$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{6}x = 1.$$

Řešením rovnice je $x = 2{,}4\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}\ 24\,\mathrm{min}$.

Závěr. Oba kopáči by společně vykopali příkop za 2 h a 24 minut.

Metodické poznámky
Úloha zaměřená na procvičení slovních úloh o společné práci, kterou je možné řešit také úsudkem.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: řešení lineárních rovnic

Prvním přítokem se bazén naplní za 60 hodin, druhým za 30 hodin a třetím za 20 hodin. Za jak dlouho se bazén naplnil, jestliže se nejdříve na 5 hodin otevřel jen první přítok a teprve potom i druhý a třetí přítok?

Řešení

Označme x počet hodin, po který byly všechny tři přítoky společně otevřeny při napouštění bazénu, pak první přítok byl otevřen po dobu $(x + 5)$ hodin. Prvním přítokem se za 1 hodinu napustila $\frac{1}{60}$ bazénu, za $(x + 5)$ hodin se napustila $\frac{x+5}{60}$ bazénu. Obdobně druhým čerpadlem se za 1 hodinu napustila $\frac{1}{30}$ bazénu a třetím přítokem $\frac{1}{20}$ bazénu, za x hodin se druhým přítokem napustila $\frac{1}{30}x$ bazénu a třetím přítokem $\frac{1}{20}x$ bazénu. Proto platí

$$\frac{x+5}{60} + \frac{x}{30} + \frac{x}{20} = 1.$$

Řešením této rovnice je $x = \frac{55}{6}\,\mathrm{h} = 9\,\mathrm{h}\ 10\,\mathrm{min}$. Všechny tři výtoky byly společně otevřeny 9 hodin a 10 minut, pak celková doba napouštění bazénu byla 14 hodin a 10 minut.

Závěr. Celková doba napouštění bazénu byla 14 hodin a 10 minut.

Metodické poznámky

Slovní úloha o společné práci vycházející z reálné situace. Úloha je řešena pomocí lineární rovnice a je využitelná i při procvičování lineárních rovnic.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení soustavy lineárních rovnic

První dělník vyrobí za hodinu 20 výrobků, druhý 15 a třetí 12. Kolik hodin pracoval každý z nich, když dohromady odpracovali 36 hodin a každý vyrobil stejný počet výrobků?

Řešení

Označme x, y, z po řadě počet hodin výroby prvního, druhého a třetího dělníka. Všichni tři dělníci dohromady odpracovali 36 hodin, tedy

$$x + y + z = 36. \tag{1}$$

První dělník vyrobí za hodinu 20 výrobků, za x hodin vyrobí $20x$ výrobků. Druhý dělník vyrobí za hodinu 15 výrobků, za y hodin vyrobí $15y$ výrobků. Třetí dělník vyrobí za hodinu 12 výrobků, za z hodin vyrobí $12z$ výrobků. Všichni tři dělníci vyrobili stejný počet výrobků, tj.

$$20x = 15y = 12z, \tag{2}$$

odtud

$$4x = 3y, \qquad 5y = 4z. \tag{3}$$

Počty hodin výroby jednotlivých dělníků získáme řešením soustavy rovnic (1) a (3). Vyjádříme-li proměnné x a z z rovnic (3) a dosadíme-li do rovnice (1), pak dostaneme rovnici

$$\tfrac{3}{4}y + y + \tfrac{5}{4}y = 36,$$

jejímž řešením je $y = 12$. Po dosazení do rovnic (3) za $y = 12$ dostaneme $x = 9$, $z = 15$.

Závěr. První dělník pracoval 9 hodin, druhý dělník 12 hodin a třetí dělník 15 hodin.

Metodické poznámky

Řešení úlohy vychází z řešení soustavy 3 lineárních rovnic o třech neznámých, což přesahuje rámec RVP ZV, ale tato soustava je běžně řešitelná dosazovací metodou, se kterou se žáci běžně setkávají při řešení soustavy 2 rovnic.

Zdroj:

Herman, J. *Matematika: rovnice a jejich soustavy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 141 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus).

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Táborský; `ttaborsky@gmk.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: úlohy o společné práci

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: rovnice se zlomky, ekvivalentní úpravy

Firma A je schopna splnit zakázku za 12 dní, firma B tutéž zakázku za 18 dní. Za kolik dní bude splněna zakázka, jestliže první dva dny na ní pracuje jen firma A sama, zbývající dny pak obě firmy?

Řešení

Za neznámou x zvolíme počet dnů, ve kterých pracují obě firny společně. Firma A splní za 2 dny $\frac{2}{12}$ zakázky, za x dnů splní $\frac{x}{12}$ zakázky, firma B splní za x dnů $\frac{x}{18}$ zakázky. Obě firmy splní za $(2+x)$ dní $\left(\frac{2}{12}+\frac{x}{12}+\frac{x}{18}\right)$ zakázky.

Sestavíme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{2}{12}+\frac{x}{12}+\frac{x}{18} &= 1, \\ 6+3x+2x &= 36, \\ 5x &= 30, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Závěr. Zakázka bude splněna celkem za 8 dní.

Metodické poznámky
Úloha může být řešena úvahou.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: rovnice s jednou neznámou, ekvivalentní úpravy

Dvěma čerpadly se naplní bazén za 10 hodin. Pokud by bylo v provozu pouze jedno čerpadlo, bazén by byl napuštěn za 15 hodin. Za jak dlouho by se bazén napustil pouze druhým čerpadlem?

Řešení

Za neznámou x zvolíme dobu (v hodinách), za kterou by se bazén naplnil pouze druhým čerpadlem. Za 1 hodinu se tímto čerpadlem naplní $\frac{1}{x}$ bazénu. Pouze prvním čerpadlem se za 1 hodinu naplní $\frac{1}{15}$ bazénu, oběma současně $\frac{1}{10}$. Můžeme tedy sestavit následující rovnici

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{15} &= \frac{1}{10}, \\ 30 + 2x &= 3x, \\ 30 &= x. \end{aligned}$$

Závěr. Pouze druhým čerpadlem by se bazén naplnil za 30 hodin.

Metodické poznámky

Úloha vede k řešení rovnice s neznámou ve jmenovateli. Je třeba počítat s tím, že bystřejší žáci mohou úlohu řešit úvahou.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rovnice s neznámou ve jmenovateli, kvadratické rovnice, ekvivalentní úpravy, práce se zlomky

V třídičce brambor pracují dva stroje současně, které roztřídí denní sklizeň brambor za 12 hodin. Kdyby pracoval pouze první stroj, potřeboval by ke zpracování denní sklizně o 10 hodin více než druhý stroj. Jak dlouho by trvalo třídění brambor prvním strojem?

Řešení

Označme x (v hodinách) dobu zpracování sklizně pouze druhým strojem. Pak samotný první stroj roztřídí denní sklizeň brambor za $(x+10)$ hodin. Dále určíme, jakou část sklizně roztřídí stroje za 1 hodinu: první stroj roztřídí $\frac{1}{x+10}$ brambor, druhý stroj roztřídí $\frac{1}{x}$ brambor, oba současně roztřídí $\frac{1}{12}$ brambor. Platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} &= \frac{1}{12}, \\ 12\,(x+10) + 12x &= x(x+10), \\ x^2 - 14x - 120 &= 0. \end{aligned}$$

Výpočtem diskriminantu určíme počet kořenů rovnice

$$D = (-14)^2 + 480 = 196 + 480 = 676.$$

Protože je diskriminant kladný, má daná rovnice dva různé reálné kořeny. Vzorcem pro výpočet kořenů kvadratické rovnice zjistíme, že

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{14+26}{2} = 20 \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{14-26}{2} = -6.$$

Záporný kořen nemá smysl, proto uvažujeme pouze jeden kořen, a to číslo 20.

Závěr. Prvnímu stroji by třídění brambor trvalo $20 + 10 = 30$ hodin.

Zkouška. Prvním strojem se brambory roztřídí za 20 hodin, za 1 hodinu se roztřídí $\frac{1}{20}$ sklizně. Druhým strojem stejná práce trvá $(20+10)$ hodin, za 1 hodinu tedy $\frac{1}{30}$ denní sklizně. Platí $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$, proto pokud budou v provozu oba stroje, denní úroda se sklidí za 12 hodin.

Metodické poznámky

Při řešení úlohy je třeba počítat s alternativními metodami řešení, např. úvahou. Úloha překračuje rámec RVP ZV, může být využita v rámci rozšiřujícího učiva.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; `slezakov@seznam.cz`

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: slovní úlohy na společnou práci

Úloha 1 (úroveň 1–2)
Předpokládané znalosti: řešení rovnic

David je schopen sám zrýt zahradu za dvě hodiny, jeho tatínkovi na to stačí 40 minut. Za jak dlouho zryjí zahradu, budou-li pracovat společně?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje (za neznámou zvolíme hledaný počet minut a označíme ji x).

	Část zahrady zrytá za jednu minutu	Část zahrady zrytá za x minut
David	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{120}x$
tatínek	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}x$

Z tabulky je možné sestavit rovnici. Oba zryjí $\frac{x}{120} + \frac{x}{40}$ zahrady, což má být celá zahrada, tzn. jeden celek)

$$\begin{aligned}\frac{x}{120} + \frac{x}{40} &= 1,\\ x + 3x &= 120,\\ x &= 30.\end{aligned}$$

Závěr. Budou-li pracovat společně David s tatínkem, bude zahrada zryta za 30 minut.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže výpočet rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: řešení rovnic

Malíř profesionál by společně s malířem amatérem vymalovali domek za 20 hodin. Malíř profesionál by sám tuto práci vykonal za 30 hodin. Jak dlouho by maloval domek malíř amatér?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje (za neznámou zvolíme hledaný počet hodin malíře amatéra a označíme ji x)

	Čas potřebný k vymalování domu	Část domu
profesionál	30	$\frac{20}{30}$
amatér	x	$\frac{20}{x}$

Z tabulky je možné sestavit rovnici (oba vymalují $\frac{20}{30}+\frac{20}{x}$ domu, což má být vymalování celého domu, tzn. jeden celek)

$$\frac{20}{30}+\frac{20}{x}=1,$$
$$20x+600=30x,$$
$$x=60.$$

Závěr. Malíř amatér by vymaloval dům sám za 60 hodin.

Metodické poznámky

Pro slabší žáky může být problémem pochopit sestavení rovnice.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: řešení rovnic, poměr

Firma PAT je schopna splnit zakázku za 12 dní, firma MAT za 18 dní. První dva dny na ní pracuje jen firma PAT, zbývající dny obě firmy. Jak si mají firmy spravedlivě rozdělit odměnu 450 000 Kč za splnění zakázky?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje (za neznámou zvolíme hledaný počet dnů a označíme ji x)

Část zakázky splněné	za 1 den	za x dní
PAT	$\frac{1}{12}$	$\frac{x}{12}$
MAT (pracuje o dva dny méně)	$\frac{1}{18}$	$\frac{x-2}{18}$

Z tabulky je možné sestavit rovnici (obě splní $\frac{x}{12}+\frac{x-2}{18}$ zakázky, což má být splnění celé zakázky, tzn. jeden celek)

$$\frac{x}{12}+\frac{x-2}{18}=1,$$
$$3x+2x-4=36,$$
$$x=8.$$

Odměnu 4 500 000 Kč si mají rozdělit v poměru za odvedenou práci. Firma PAT splnila $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ zakázky, firma MAT splnila $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ zakázky, proto si odměnu rozdělí v poměru $2 : 1$.

Závěr.

a) Zakázka bude splněna za 8 dnů.
b) Firmě PAT připadne odměna 300 000 Kč a firmě MAT potom připadne odměna 150 000 Kč.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit sestavení rovnice, pro slabší také výpočet poměru po stanovení odměny.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; zatloukalova@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: slovní úlohy o směsích

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: řešení rovnic

Pokladní má v pokladně stokoruny a dvousetkoruny. Spočítala, že celková částka je 9 900 Kč a dohromady má 63 bankovek. Kolik je v pokladně stokorun?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje.

Hodnota bankovky	Počet bankovek	Částka v Kč
100	x	$100x$
200	$63 - x$	$200 \cdot (63 - x)$

Z tabulky je možné sestavit rovnici

$$\begin{aligned} 100x + 200 \cdot (63 - x) &= 9900, \\ -100x &= -2700, \\ x &= 27. \end{aligned}$$

Závěr. V pokladně je 27 stokorun.

Metodické poznámky

Tato úloha je pro děti na pochopení snadná, některým může činit obtíže sestavení rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: řešení rovnic

V hotelu Slunce ubytovali 287 hostů v třílůžkových a čtyřlůžkových pokojích. Kolik je čtyřlůžkových pokojů, jestliže čtyřlůžkové pokoje jsou plně obsazené, v jednom v třílůžkovém pokoji jsou ubytováni pouze dva hosté a hosté jsou ubytováni v 81 pokojích?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje.

pokoje	Počet pokojů	Počet ubytovaných hostů
třílůžkové	x	$3x - 1$
čtyřlůžkové	$81 - x$	$4 \cdot (81 - x)$

Z tabulky je možné sestavit rovnici

$$\begin{aligned} 3x - 1 + 4 \cdot (81 - x) &= 287, \\ 323 - x &= 287, \\ x &= 36. \end{aligned}$$

Závěr. V hotelu je 45 čtyřlůžkových pokojů.

Metodické poznámky

Pro slabší žáky může být problémem pochopit sestavení rovnice a pochopení jednoho neobsazeného místa.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: řešení rovnic

V balírnách mají připravit směs čokoládových bonbónů tak, aby jeden kilogram stál 240 Kč. Ve skladě jsou dva druhy čokoládových bonbónů – levnější v ceně 220 Kč za 1 kg a dražší v ceně 300 Kč za 1 kg. V jakém poměru je třeba namíchat levnější a dražší bonbóny?

Řešení

Do přehledné tabulky si doplníme údaje. Přitom předpokládáme, že budeme míchat 1 kg směsi.

	Cena za 1 kg	hmotnost	Cena
levnější	220	x	$220x$
dražší	300	$1 - x$	$300 \cdot (1 - x)$

Z tabulky je možné sestavit rovnici

$$\begin{aligned} 220x + 300 \cdot (1 - x) &= 240 \cdot 1, \\ -80x &= -60, \\ x &= \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

Poměr levnějších a dražších bonbónů je tedy $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 1$

Závěr. Poměr levnějších a dražších bonbónů ve směsi je 3 : 1.

Metodické poznámky

Pro některé žáky může být problémem pochopit sestavení rovnice a následné sestavení do poměru.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: Mgr. Helena Zatloukalová; `zatloukalova@gjs.cz`

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP ZV: Číslo a proměnná
Klíčové pojmy: úlohy o směsích

Úloha 1 (úroveň 1)
Předpokládané znalosti: rovnice, ekvivalentní úpravy

Petra koupila 10 pohlednic dvou druhů. Levnější byly po 3 Kč, dražší po 5 Kč. Zaplatila za ně celkem 42 Kč. Kolik kterých pohlednic Petra koupila?

Řešení

Označme x počet levnějších pohlednic. Protože Petra koupila celkem 10 pohlednic, je počet dražších pohlednic $(10 - x)$. Protože levnější pohlednice se prodávaly po 3 Kč za kus, je $3x$ Kč cena levnějších pohlednic. Stejná úvaha je pro dražší pohlednice, tj. $5(10 - x)$ Kč. Protože Petra zaplatila celkem 42 Kč, platí

$$\begin{aligned} 3x + 5(10 - x) &= 42, \\ -2x &= -8, \\ x &= 4. \end{aligned}$$

Zkouška. $3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 12 + 30 = 42$.

Závěr. Dražších pohlednic Petra koupila 6 kusů a levnějších 4 kusy.

Metodické poznámky
Žáci mohou úlohu řešit úvahou.

Úloha 2 (úroveň 2)
Předpokládané znalosti: rovnice, ekvivalentní úpravy

Nádoba na 60 litrů vody se má naplnit vodou o teplotě 60 °C. Kolik litrů vody o teplotě 80 °C a kolik litrů vody o teplotě 20 °C se musí smíchat?

Řešení

Budeme předpokládat, že smícháme x litrů o teplotě 80 °C a $(60 - x)$ litrů o teplotě 20 °C. Po vyrovnání teplot klesne teplota teplejší vody o $(80 - 60)$ °C, tj. o 20 °C a teplota chladnější vody vzroste o $(60 - 20)$ °C, tedy o 40 °C. Pak platí

$$\begin{aligned} x \cdot 20 &= (60 - x) \cdot 40, \\ 20x &= 2\,400 - 40x, \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Závěr. Musíme smíchat 40 l vody o teplotě 80 °C s 20 l vody o teplotě 20 °C.

Metodické poznámky

Žáci si musí uvědomit postup při řešení úloh, kdy uvažujeme míchání látek o různých teplotách. Tepelné ztráty a rozdíly objemů vody při různých teplotách zanedbáváme.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rovnice, ekvivalentní úpravy, práce se zlomky

Kolik gramů pevného síranu měďnatého musíme přidat do 250 g 10% vodného roztoku síranu měďnatého, aby vznikl 40% roztok?

Řešení

Označíme hledané množství x gramů, pak vyjádříme množství čisté látky v původním a konečném roztoku. Platí tedy

roztok	čistá látka
x g 100%	$x \cdot \frac{100}{100}$ g $= x$ g
250 g 10%	$250 \cdot \frac{10}{100}$ g $= 25$ g
$(250 + x)$ g 40%	$(250 + x) \cdot \frac{40}{100}$ g

Sestavíme rovnici

$$\begin{aligned} x + 250 \cdot \frac{10}{100} &= (250 + x) \cdot \frac{40}{100}, \\ 100x + 2\,500 &= 40x + 10\,000, \\ 60x &= 7\,500, \\ x &= 125. \end{aligned}$$

Závěr. Do 250 g 10% vodného roztoku síranu měďnatého musíme přidat 125 gramů pevného síranu.

Metodické poznámky

Úloha poukazuje na mezipředmětové souvislosti matematiky a chemie.

Zdroj: archiv autora
Obrazový materiál:
Autor: RNDr. Jana Slezáková, Ph.D.; `slezakov@seznam.cz`