

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Závislosti a funkční vztahy

Typ úloh: Různé metody řešení



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	6
Metodický list 3	10
Metodický list 4	12

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: sinus úhlu, kosinus úhlu, vztah mezi sinem a kosinem, součtové vzorce

Úloha

Na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ určete největší a nejmenší hodnotu výrazu $\sin x + \cos x$.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi sinem a kosinem téhož argumentu

Pro x z intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ je $\sin x$ i $\cos x$ nezáporný, proto $\sin x + \cos x > 0$. Nabývá-li výraz $\sin x + \cos x$ pro určité x největší, resp. nejmenší hodnoty, nabývá největší, resp. nejmenší hodnoty i jeho druhá mocnina. Platí:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

Výraz $1 + \sin 2x$ nabývá největší hodnotu, právě když $\sin 2x = 1$, tj. $x = \frac{\pi}{4}$. Nejmenší hodnotu nabývá, právě když $\sin 2x = 0$, tj. $x = 0$ nebo $x = \frac{\pi}{2}$.

Dosazením do daného výrazu zjistíme, že jeho největší hodnota je

$$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

jeho nejmenší hodnota je $\sin 0 + \cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1$.

Závěr. Pro x z intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ nabývá výraz $\sin x + \cos x$ největší hodnotu $\sqrt{2}$ a nejmenší hodnotu 1.

Metodické poznámky

Určujeme-li pouze hodnotu, pak není nutné argument určovat. Výraz $1 + \sin 2x$ je druhou mocninou hledané hodnoty, takže pro $\sin 2x = 1$ je druhá mocnina maxima 2, tj. největší hodnotou je $\sqrt{2}$. Nejmenší hodnotou je 1 (pro $\sin 2x = 0$).

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: součtové goniometrické vzorce

Platí

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

a $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Vypočteme:

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= \sin x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \\ &= 2 \sin \frac{(x + \frac{\pi}{2} - x)}{2} \cos \frac{(x - \frac{\pi}{2} + x)}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Funkce $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ na intervalu $\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \rangle$ klesá. Největší hodnotu nabývá pro $x = \frac{\pi}{4}$, a to $\sqrt{2} \cos 0 = \sqrt{2}$. Nejmenší hodnotu nabývá pro $x = \frac{\pi}{2}$; vzhledem k tomu, že $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ nelze větší x uvažovat. Tato hodnota je $\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1$.

Závěr. Pro x z intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ nabývá výraz $\sin x + \cos x$ největší hodnotu $\sqrt{2}$ a nejmenší hodnotu 1.

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: goniometrické funkce, graf kvadratické funkce

Označme hledanou největší, resp. nejmenší hodnotu a . Hledáme $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ tak, aby $\sin x + \cos x = a$. Protože $\sin x \geq 0$ a $\cos x \geq 0$, musí být $a > 0$.

Nahradíme kosinus sinem a rovnost umocníme ($\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$):

$$\begin{aligned}\sin x + \sqrt{1 - \sin^2 x} &= a, \\ \sin^2 x + 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} + 1 - \sin^2 x &= a^2, \\ 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} &= a^2 - 1, \\ 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) &= (a^2 - 1)^2, \\ \sin^2 x - \sin^4 x &= \frac{(a^2 - 1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Položme $u = \sin^2 x$. Potom poslední rovnost lze psát ve tvaru

$$-u^2 + u = \frac{(a^2 - 1)^2}{4}. \quad (*)$$

Pravá strana rovnosti (*) je nejmenší, je-li nejmenší $-u^2 + u$, což nastane pro $u = 0$ (resp. $u = 1$), neboť $-u^2 + u \geq 0$, jak je vidět z rovnosti (*). Potom

$$\frac{(a^2 - 1)^2}{4} = 0,$$

a tedy nejmenší $a = 1$ (a musí být kladné).

Hledanou hodnotu lze zjistit i takto: Je-li $u = 0$, pak $\sin^2 x = 0$ (nebo také $\sin^2 x = 1$ pro $u = 1$), což dává $x = 0$ (nebo $x = \frac{\pi}{2}$). Potom $\sin 0 + \cos 0 = 1$.

Pravá strana rovnosti (*) je největší, je-li největší $-u^2 + u$. Hledáme vlastně vrchol paraboly grafu kvadratické funkce $y = -u^2 + u$, a ten je $u = \frac{1}{2}$ ($= \frac{-b}{2a}$ pro $ax^2 + bx + c$). Pro $u = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\frac{(a^2 - 1)^2}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2},$$

odkud $a = \sqrt{2}$ (a musí být kladné).

Hledanou hodnotu lze zjistit i takto: Je-li $u = \frac{1}{2}$, pak $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, odtud $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $x = \frac{\pi}{4}$. Potom $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

Závěr. Pro x z intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ nabývá výraz $\sin x + \cos x$ největší hodnotu $\sqrt{2}$ a nejmenší hodnotu 1.

Řešení 4 (úroveň 3+)

Předpokládané znalosti: derivace sinu a kosinu, hledání extrémů funkce

Máme určit lokální extrémy funkce $f(x) = \sin x + \cos x$, na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

První derivaci funkce $f(x)$ položíme rovnu 0 a zjistíme tzv. stacionární body, kde se extrémy mohou nacházet. Máme $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$ a odtud po snadné úpravě $\tan x = 1$. Nalezli jsme jeden možný extrém v $x = \frac{\pi}{4}$; nalevo od tohoto bodu funkce roste (např. $\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} > 0$), napravo klesá (např. $\cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} < 0$), jde tedy o maximum. Jeho hodnotu zjistíme dosazením: $f(\frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

Protože je funkce $f(x)$ definovaná na uzavřeném intervalu, mohou být další extrémy v jeho hraničních bodech: $\sin 0 + \cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1$.

Závěr. Pro x z intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ nabývá výraz $\sin x + \cos x$ největší hodnotu $\sqrt{2}$ a nejmenší hodnotu 1.

Zdroj: dílo autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: kvadratická funkce, parabola

Úloha

Parabola je dána rovnicí $y = -2x^2 - x + 1$. Určete vrchol paraboly a parabolu načrtněte.

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: kvadratická funkce, doplňování na druhou mocninu dvojčlenu

Výraz na pravé straně upravíme doplněním na druhou mocninu dvojčlenu

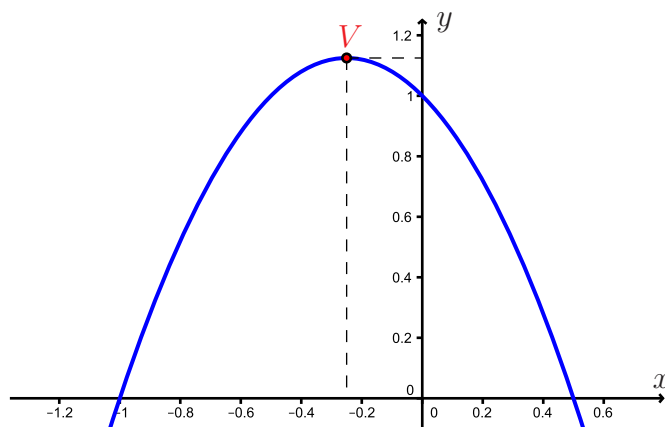
$$-2x^2 - x + 1 = -2\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) + 1 = -2\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{8} + 1 = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}.$$

Vrchol paraboly má souřadnice $V\left[-\frac{1}{4}; \frac{9}{8}\right]$.

Abychom mohli načrtnout graf funkce, určíme průsečíky se souřadnicovými osami. Průsečíky s osou x mají druhou souřadnici rovnou 0, řešíme tedy kvadratickou rovnici $-2x^2 - x + 1 = 0$. Tato rovnice má dva kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Průsečíky s osou x jsou body

$$P_{x_1}[-1; 0], \quad P_{x_2}\left[\frac{1}{2}; 0\right].$$

Průsečík s osou y má první souřadnici rovnou 0, do předpisu funkce $f(x) = -2x^2 - x + 1$ dosadíme $x = 0$, dostaneme $f(0) = 1$. Průsečík s osou y je bod $P_y[0; 1]$. Parabola je souměrná podle své osy (přímka $x = -\frac{1}{4}$), bude procházet bodem $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ (tento bod je souměrně sdružený s bodem P_y podle osy paraboly).



Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: kvadratická funkce, grafické řešení kvadratické rovnice

K výpočtu první souřadnice vrcholu paraboly využijeme průsečíky s osou x .

Označme souřadnice vrcholu paraboly $V[x_0; y_0]$. Průsečíky s osou x mají druhou souřadnici rovnu 0, řešíme tedy rovnici $-2x^2 - x + 1 = 0$. Tato rovnice má dva kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Parabola je souměrná podle své osy, proto první souřadnice vrcholu paraboly je rovna aritmetickému průměru prvních souřadnic průsečíků s osou x

$$x_0 = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Druhou souřadnici vrcholu paraboly vypočítáme jako funkční hodnotu v bodě x_0

$$y_0 = f(x_0) = -2 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^2 - \left(\frac{-1}{4}\right) + 1 = \frac{-1}{8} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{8}.$$

Vrchol paraboly má souřadnice $V\left[-\frac{1}{4}; \frac{9}{8}\right]$.

Průsečík s osou y zjistíme stejně jako v řešení 1 a načrtne graf funkce.

Řešení 3 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kvadratická funkce, vzorec pro výpočet vrcholu paraboly

K určení vrcholu paraboly $y = ax^2 + bx + c$ použijeme vzorec $V\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$. Dosazením $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$ (z předpisu funkce) dostaneme $V\left[-\frac{1}{4}; \frac{9}{8}\right]$.

Průsečíky se souřadnicovými osami zjistíme stejně jako v prvním řešení a načrtne graf funkce.

Řešení 4 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie kvadratických útvarů (parabola), doplňování na druhou mocninu dvojčlenu

Souřadnice vrcholu paraboly určíme analyticky (z vrcholové rovnice paraboly). Rovnici paraboly $y = -2x^2 - x + 1$ upravíme na tvar

$$x^2 + \frac{x}{2} = -\frac{y}{2} + \frac{1}{2}.$$

Výraz na levé straně doplníme na druhou mocninu dvojčlenu

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} = -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

a dostaneme vrcholovou rovnici paraboly

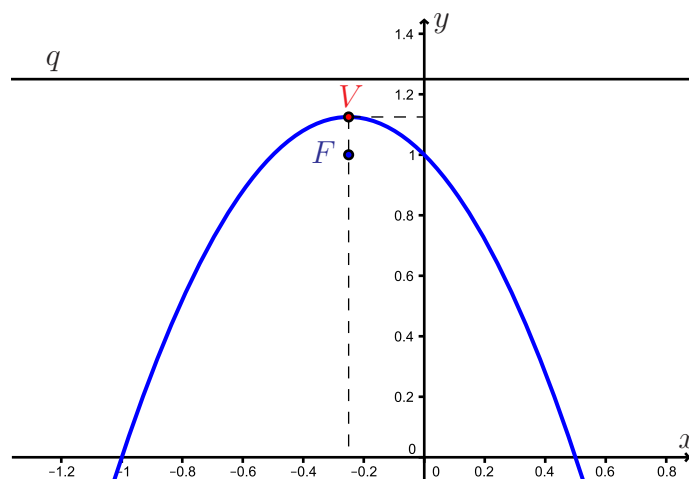
$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} \left(y - \frac{9}{8}\right).$$

Vrcholem paraboly je bod $V\left[-\frac{1}{4}; \frac{9}{8}\right]$.

Parabolu můžeme načrtnout stejně jako v 1 (pomocí průsečíků se souřadnicovými osami) nebo můžeme využít analytickou definici paraboly. Z vrcholové rovnice paraboly určíme parametr p (vzdálenost ohniska paraboly F od řídicí přímky q)

$$2p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{8}.$$

Osa paraboly je rovnoběžná s osou y , ohniskem F je bod $[-\frac{1}{4}; \frac{9}{8} - \frac{1}{8}] = [-\frac{1}{4}; 1]$, řídicí přímka q má rovnici $y = \frac{9}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$. Parabolu načrtneme jako množinu všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od ohniska F a řídicí přímky q .



Řešení 5 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: derivace funkce a její užití k určování lokálních extrémů

První souřadnici vrcholu paraboly určíme užitím diferenciálního počtu. Vrchol paraboly je bod, ve kterém má kvadratická funkce lokální extrém. Určíme 1. derivaci funkce $f(x) = -2x^2 - x + 1$

$$f'(x) = -4x - 1.$$

Položíme $f'(x) = 0$ a zjistíme stacionární body

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Bod $x = -\frac{1}{4}$ je stacionární bod, tedy bod „podezřelý z extrému“. Pro $x < -\frac{1}{4}$ je $f'(x) > 0$ a pro $x > -\frac{1}{4}$ je $f'(x) < 0$, tedy funkce f má v bodě $x_0 = -\frac{1}{4}$ lokální maximum. Druhou souřadnici vrcholu paraboly vypočítáme jako funkční hodnotu v bodě x_0

$$y_0 = f(x_0) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{8}.$$

Vrchol paraboly má souřadnice $V \left[-\frac{1}{4}; \frac{9}{8}\right]$.

Průsečíky se souřadnicovými osami zjistíme stejně jako v úvodním řešení a načrtneme graf funkce.

Metodické poznámky

Určování vrcholu paraboly doplňováním na druhou mocninu dvojčlenu (řešení 1), užitím průsečíků paraboly s osou x (řešení 2) nebo použitím vzorce pro výpočet vrcholu paraboly (řešení 3) je zařazeno do tematického celku Funkce. Analyticky (řešení 4) určujeme vrchol paraboly při probírání tematického celku Kuželosečky. Diferenciální počet sice v RVP G obsažen není, pokud ale na některých školách diferenciální počet je součástí ŠVP, určování vrcholu paraboly užitím první derivace (řešení 4) je velmi elegantní způsob řešení.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Ivana Machačíková; machacikova@gymz1.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: analytická geometrie, vrcholová rovnice paraboly, obecná rovnice paraboly, vrchol paraboly

Úloha

Najděte vrchol paraboly, která je dána rovnicí $y = 2x^2 + 14x - 16$.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vrcholová rovnice paraboly, převod obecné rovnice na rovnici vrcholovou

Vrcholová rovnice paraboly má tvar $y - n = a(x - m)^2$, kde čísla m, n označují x -ovou a y -ovou souřadnici vrcholu. Rovnici paraboly ze zadání převedeme do tohoto tvaru. Tedy $y = 2x^2 + 14x - 16 = 2(x^2 + 7x - 8) = 2\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{81}{2}$. Poslední úpravou již dostaneme vrcholovou rovnici této paraboly, $y + \frac{81}{2} = 2\left(x + \frac{7}{2}\right)^2$. Nyní přímo přečteme souřadnice vrcholu paraboly, $V\left[-\frac{7}{2}; -\frac{81}{2}\right]$.

Závěr. Vrchol této paraboly je bod $V\left[-\frac{7}{2}; -\frac{81}{2}\right]$.

Metodické poznámky

Řešení je vhodným procvičením vztahů mezi různými typy rovnic paraboly. Pro některé studenty je však obtížnější kvůli tzv. doplnění na čtverec, kterým se převádí obecná rovnice na rovnici vrcholovou.

Řešení 2 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: graf kvadratické funkce, vztah vrcholu paraboly k jejím průsečíkům s osou x .

Hodnotu x -ové souřadnice vrcholu V_x je možné spočítat ze vztahu $V_x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $2x^2 + 14x - 16 = 0$. Tento vztah plyne ze skutečnosti, že vrchol paraboly má stejnou vzdálenost od obou průsečíků paraboly s osou x . Kořeny výše zmíněné kvadratické funkce jsou čísla -8 a 1 . Pak $V_x = \frac{-8+1}{2} = -\frac{7}{2}$. Druhou souřadnici V_y dopočítáme prostým dosazením do původní rovnice paraboly, neboť vrchol je bodem paraboly a jeho souřadnice tak musí splňovat danou rovnici. $V_y = 2\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 14\left(-\frac{7}{2}\right) - 16 = -\frac{81}{2}$.

Metodické poznámky

Toto řešení je vhodným propojením mezi grafickým znázorněním paraboly a jeho obecnou rovnicí. Studentům se většinou zdá jednodušší než řešení 1. Dobře demonstruje, že souřadnice bodů paraboly jsou svázány její rovnicí.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: 1. derivace funkce, extrémy funkce, vztah 1. derivace a lokálních extrémů funkce jedné reálné proměnné

Hledaná x -ová souřadnice vrcholu paraboly je bod, ve kterém má zadaná kvadratická funkce lokální extrém. Jelikož je kvadratická funkce ve všech bodech diferencovatelná, musí být hodnota 1. derivace funkce v tomto bodě nulová. Tedy $(2x^2 + 14x - 16)' = 4x + 14 = 0$. Řešením této rovnice je opět číslo $-\frac{7}{2}$. Odpovídající y -ovou souřadnici najdeme stejně jako v předchozím řešení.

Metodické poznámky

Řešení této úlohy pomocí derivace nepatří do RVP. Často se však diferenciální počet vyučuje v seminářích a je vhodnou přípravou na učivo vysoké školy. Výpočet je krátký, na čemž je vhodné demonstrovat úlohu matematiky jako vědy při výpočtech.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Různé metody řešení

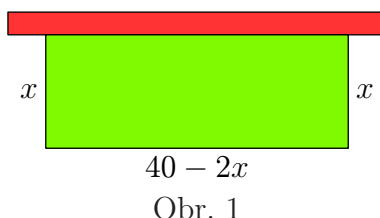
Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: funkce, lokální extrém funkce

Úloha

Chceme oplotit pozemek pravoúhelníkového tvaru, přitom jedna strana pozemku je ohraničena již stávající stěnou (obr. 1). Na oplocení máme 40 metrů pletiva. Určete rozměry pozemku tak, aby jeho obsah byl co největší.

Délky stran pozemku jsou x , $40 - 2x$ v metrech, obsah $S = (40 - 2x)x$ v metrech čtverečných. Dále je zřejmé, že $x \in (0; 20)$.



Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: sčítání a násobení mnohočlenů, sčítání a násobení lomených výrazů

Lemma. Součin dvou kladných činitelů a , b jejichž součet je konstantní, nabývá největší hodnoty, právě když platí $a = b$.

Důkaz. Předpokládejme $a \neq b$. Nahradme každého činitele aritmetickým průměrem $\frac{a+b}{2}$.

Součet činitelů se nezmění

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} = a+b.$$

Máme dokázat $\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2 > ab$. Ekvivalentními úpravami této nerovnosti dostaneme nerovnici $(a-b)^2 > 0$, která je splněna pro každé $a \neq b$. Tím je důkaz ukončen.

Vraťme se k řešení našeho příkladu. Obdélník má strany délky $40 - 2x$ a x . Jeho obsah je $S = (40 - 2x)x$. Zajímá nás, pro které x je součin $(40 - 2x)x$ největší. Kdyby součet těchto dvou činitelů byl konstantní, byl by jejich součin největší tehdy, kdyby oba činitele měly stejnou velikost. Součet činitelů na pravé straně poslední rovnice je $(40 - 2x) + x = 40 - x$, to znamená, že se mění s x . Pokud obě strany rovnice $S = (40 - 2x)x$ vynásobíme dvěma, dostaneme rovnici $2S = (40 - 2x)2x$. Součet činitelů na pravé straně je nyní konstantní, platí $(40 - 2x) + 2x = 40$. Součin těchto činitelů je tedy největší, pokud se oba činitele rovnají. To znamená $40 - 2x = 2x$. Řešením této rovnice dostáváme $x = 10$.

Závěr. Rozměry pozemku jsou 10 m a 20 m.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: sčítání a násobení mnohočlenů

Výraz $(40 - 2x)x$ upravíme následujícím způsobem

$$(40 - 2x)x = -2x^2 + 40x = -2(x^2 - 20x + 10^2) + 2 \cdot 10^2 = 200 - 2(x - 10)^2.$$

Výraz $-2(x - 10)^2 + 200$ má největší hodnotu pro $x = 10$, a to 200.

Docházíme ke stejnému závěru – rozměry pozemku jsou 10 m a 20 m.

Řešení 3 (úroveň 2)

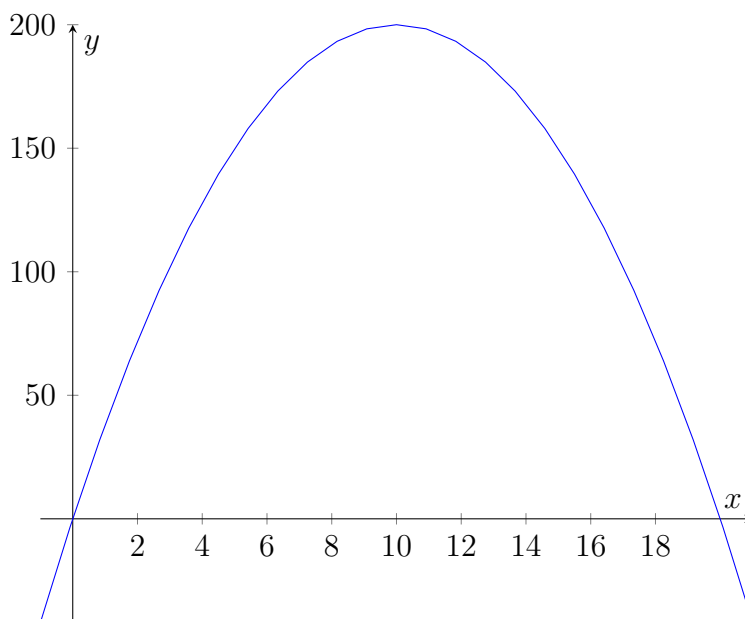
Předpokládané znalosti: kvadratická funkce

Obsah obdélníku je $S = (40 - 2x)x = -2x^2 + 40x$. Obsahu obdélníku přiřadíme rovnici kvadratické funkce $y = -2x^2 + 40x$. Hledáme bod grafu dané kvadratické funkce, jehož y -ová je největší. Grafem naší kvadratické funkce je parabola otevřená směrem dolů (obr. 2). Hledaný bod je vrchol paraboly V , jeho souřadnice x_V je hledané řešení našeho příkladu.

Průsečíky paraboly $(40 - 2x)x$ s osou x jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 20$.

Průsečíky paraboly a osy x mají souřadnice $[0; 0]$, $[20; 0]$. Vrchol paraboly V je v bodě $x_V = 10$. (Parabola je souměrná podle osy, která prochází vrcholem paraboly a je rovnoběžná s osou y .)

Opět docházíme ke stejnému závěru – rozměry pozemku jsou 10 m a 20 m.



Obr. 2

Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: základy diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné

Obsah obdélníku je $S = (40 - 2x)x$. Naším úkolem je učit hodnotu x , pro niž je S maximální. Použijeme diferenciálního počtu. Užitím 1. derivace $S'(x)$ určíme stacionární body funkce $S(x) = -2x^2 + 40x$. Vyřešíme tak rovnici $S'(x) = 0$, kde $S'(x) = -4x + 40$. Existuje tedy jediný stacionární bod funkce $S(x)$, a to $x = 10$.

Užitím 2. derivace ověříme, že se jedná o lokální maximum, neboť

$$S''(x) = -4 < 0.$$

Opět docházíme k závěru, že rozměry pozemku jsou 10 m a 20 m.

Metodické poznámky

Standardní úloha z učiva střední školy umožňuje žákům ukázat čtyři odlišné přístupy vyšetřování extrému funkce jedné proměnné. Na základě zkušeností autora lze očekávat, že překvapením pro žáky bude řešení 1.

Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků (žáci budou schopni přijít na řešení 2, 3, 4) a následně diskutovat výhody a nevýhody zvoleného řešení.

Zdroj:

Odvárko O.: *Matematika pro gymnázia (funkce)*, Prometheus, 1994.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz