

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Závislosti a funkční vztahy

Typ úloh: Gradované úlohy



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	8
Metodický list 3	12
Metodický list 4	18
Metodický list 5	22
Metodický list 6	25
Metodický list 7	29
Metodický list 8	32
Metodický list 9	35
Metodický list 10	40
Metodický list 11	45
Metodický list 12	49
Metodický list 13	53
Metodický list 14	58
Metodický list 15	62
Metodický list 16	64
Metodický list 17	67
Metodický list 18	70
Metodický list 19	74
Metodický list 20	77
Metodický list 21	83
Metodický list 22	87
Metodický list 23	92
Metodický list 24	95
Metodický list 25	99
Metodický list 26	101
Metodický list 27	104
Metodický list 28	107
Metodický list 29	111
Metodický list 30	113
Metodický list 31	117
Metodický list 32	119
Metodický list 33	123

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: lineární funkce, graf lineární funkce

Úloha 1 (úroveň 1)

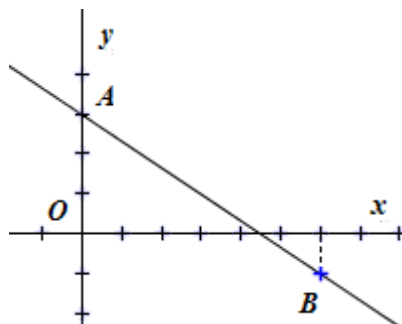
Předpokládané znalosti: rovnice přímky, lineární funkce, graf lineární funkce

Je dána rovnice $2x + 3y - 9 = 0$ přímky p . Tuto přímku graficky znázorněte a napište rovnici lineární funkce, jejímž grafem je přímka p .

Řešení

Přímku nejsnadněji sestrojíme tak, že si najdeme souřadnice dvou bodů přímky, tj. které vyhovují rovnici přímky, a použijeme poznatek z geometrie, že přímka je dána dvěma svými body. V našem případě $A[0; 3]$, $B[6; -1]$

	A	B
x	0	6
y	3	-1



Z dané rovnice pak vypočteme $y = 3 - \frac{2}{3}x$, a to je rovnice lineární funkce, jejímž grafem je přímka p .

Metodické poznámky

Žáci by se měli naučit při práci přemýšlet, např. že by požadované dva body neměly ležet blízko sebe, aby konstrukce byla přesnější, a také volit souřadnici x tak, aby ze stejného důvodu nedostali po výpočtu souřadnice y zlomek.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: absolutní hodnota, řešení nerovnice, konjunkce vlastností

Je dána funkce $y = 3 - \frac{2}{3}x$. Zjistěte, pro která x platí $|3 - \frac{2}{3}x| \leq 2$.

Ze zadání plyne, že pro hledané hodnoty x platí $-2 \leq 3 - \frac{2}{3}x \leq 2$.

Řešení (č. 1)

Uvedenou složenou nerovnici převedeme na konjunkci dvou nerovnic

$$(3 - \frac{2}{3}x \geq -2) \wedge (3 - \frac{2}{3}x \leq 2).$$

Z první nerovnice plyne

$$-\frac{2}{3}x \geq -5 \Rightarrow -2x \geq -15 \Rightarrow 2x \leq 15 \Rightarrow x \leq 7,5;$$

ze druhé nerovnice plyne

$$-\frac{2}{3}x \leq -1 \Rightarrow -2x \leq -3 \Rightarrow 2x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1,5.$$

Vzhledem k tomu, že jde o konjunkci, platí současně obě nerovnosti, takže $1,5 \leq x \leq 7,5$, takže zadaná lineární funkce má vyšetřovanou vlastnost pro všechna $x \in \langle 1,5; 7,5 \rangle$.

Řešení (č. 2)

Upravujeme přímo složenou nerovnici $-2 \leq 3 - \frac{2}{3}x \leq 2$. Od všech tří částí odečteme 3 a máme $-5 \leq -\frac{2}{3}x \leq -1$, vynásobíme je číslem 3 odkud $-15 \leq -2x \leq -3$, a ještě číslem -1 , dostaneme $15 \geq 2x \geq 3$, dělíme dvěma, vyměníme pořadí členů a máme výsledek $1,5 \leq x \leq 7,5$.

Metodické poznámky

Druhý postup je sice jednodušší a rychlejší, ale pro žáky trochu náročnější.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: lineární funkce s parametrem, sestavení tabulky funkce, čtení z tabulky, graf lineární funkce, čtení z grafu

V 5 hod ráno byla teplota vzduchu -3°C , v 10 hod pak 6°C , předpokládá se rovnoměrný růst teploty.

- Jaká teplota byla v 8.30 hod?
- Kdy byla teplota 0°C ?
- Znáznorněte průběh ranní teploty.

Řešení

- Čas označíme x , teplotu v čase x označíme y . Rovnoměrná změna teploty znamená, že y je lineární funkcí x , tj. $y = ax + b$. Koeficienty a , b vypočteme pomocí zadaných teplot v 5 a v 10 hodin, které v jazyku matematiky zapíšeme jako body $[5; -3]$, $[10; 6]$, takže $-3 = 5a + b$, $6 = 10a + b$, odkud odečtením dostaneme $9 = 5a$, $a = \frac{9}{5}$, a po

dosažení do 1. rovnice $-3 = 5 \cdot \frac{9}{5} + b$, $b = -12$. Na časovém intervalu $\langle 5; 10 \rangle$ je tak vztah času a teploty vyjádřen rovnicí lineární funkce

$$y = \frac{9}{5}x - 12.$$

V 8.30 hodin je $x = 8,5 \Rightarrow y = \frac{9}{5} \cdot 8,5 - 12 = 3,3$. V 8.30 hod byla teplota $3,3^\circ\text{C}$.

b) Teplota 0°C znamená $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{9}{5}x - 12 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$, což v hodinách je 6 hodin 40 minut. Teplota 0°C byla v 6.40 hod.

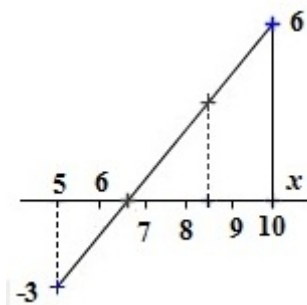
c) Průběh ranní teploty lze znázornit dvěma způsoby, tabulkou a grafem.

Tabulka: Na zadané období sestavíme tabulku např. po půlhodinách.

Hod.:	5.00	5.30	6.00	6.30	7.00	7.30	8.00	8.30	9.00	9.30	10.00
$^\circ\text{C}$	-3,0	-2,1	-1,2	-0,3	0,6	1,5	2,4	3,3	4,2	5,1	6,0

Odpověď a) vidíme přímo v tabulce: V 8.30 byla teplota $3,3^\circ\text{C}$. Vidíme, že teplota 0°C byla mezi 6.30 h a 7.00 h; tabulku pro tento interval nemusíme zjemňovat, protože je vidět, že tato teplota nastala v jedné třetině tohoto intervalu, tj. v 6.40 h.

Graf: V pravouhlé soustavě souřadnic sestrojíme úsečku spojující body $[5; -3]$ a $[10; 9]$ a z grafu vyčteme přibližné řešení. Graf lze sestrojit i pomocí Geogebra.



Z grafu vyčteme, že v 8.30 hod byla teplota $3,3^\circ\text{C}$, teplota 0°C byla v 6.40 hod. (Z grafu však tak přesné hodnoty zpravidla nevyčteme.)

Metodické poznámky

Na této úloze lze neformálně ukázat, jak lze reálnou situaci matematicky modelovat různými způsoby.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: převádění praktické úlohy do matematiky, lineární funkce s parametry, volby vhodného zobrazení, graf lineární funkce, nerovnice, MS Excel

Objem nádrže je 600 litrů. Na počátku je v nádrži 120 litrů vody, ventily u nádrže jsou nastaveny tak, že každou minutu přitéká do nádrže p litrů a vytéká q litrů na zalévání skleníků. Je-li $q = 3$, jaké musí být p , aby voda vydržela na zalévání alespoň 5 hodin a současně aby nádrž nepřetékla? Navrhněte, jak byste postupovali při grafickém znázornění výsledku vhodným softwarem, nebo přímo při grafickém řešení úlohy.

Řešení

Za minutu přiteče do nádrže p litrů a vyteče q litrů, takže se stav vody změní za minutu o $p - q$ litrů, za t minut je to $(p - q)t$; počáteční stav je 120 litrů, takže od počátku za t minut je množství vody v nádrži

$$y = (p - q)t + 120.$$

Pro zadané $q = 3$ dostaneme lineární funkci

$$y = (p - 3)t + 120.$$

a) Jaké bude p , má-li voda vydržet aspoň na 5 hodin (300 minut)

$$(p - 3) \cdot 300 + 120 \geq 0 \Rightarrow 300p - 900 + 120 \geq 0 \Rightarrow p \geq \frac{780}{300} = 2,6.$$

K tomu, aby voda vydržela na zalévání alespoň 5 hodin, je třeba, aby do nádrže přitékalo alespoň 2,6 litrů vody za minutu.

b) Jaké bude p , nemá-li během 5 hodin nádrž přetéci

$$(p - 3) \cdot 300 + 120 \leq 600 \Rightarrow 300p - 900 + 120 \leq 600 \Rightarrow p \leq \frac{1380}{300} = 4,6.$$

K tomu, aby nádrž nepřetekla, je třeba, aby do nádrže nepřitékalo více než 4,6 litrů vody za minutu.

Závěr. Obě podmínky úlohy jsou splněny, právě když p je z intervalu $\langle 2,6; 4,6 \rangle$, tedy když je přítok vody nastaven na hodnotu mezi 2,6 a 4,6 litrů za minutu.

Pro grafické znázornění výsledku lze využít např. Geogebra. Zde by se zobrazily oba krajní případy, a to nastavením počátečního bodu $[0; 120]$ a koncových bodů ze zadaných hodnot $[300; 0]$ a $[300; 600]$ a jejich spojením úsečkou nebo přímo nastavením přímek. Pro $p = 2,6$ je to přímka $y = -0,4t + 120$ a pro $p = 4,6$ přímka $y = 1,6t + 120$.

Ukázka řešení užitím Excelu. Vytvoříme tabulku pro $t \in \langle 0; 300 \rangle$ např. po 10 minutách a pro hodnoty $y = (p - 3) \cdot t + 120$. Protože budeme hledat p odpovídající zadaným podmínkám, vytvoříme pro p posuvník např. pro hodnoty od 0 do 10 s krokem 0,1. Pro větší názornost průběhu řešení vytvoříme v rozsahu $t \in \langle 0; 300 \rangle$ graf s vhodnou mřížkou a pak už jen pomocí posuvníku vyšetřujeme, pro která p nastanou zadané mezní situace, údaje z grafu kontrolujeme v tabulce (tabulky 1 a 2).

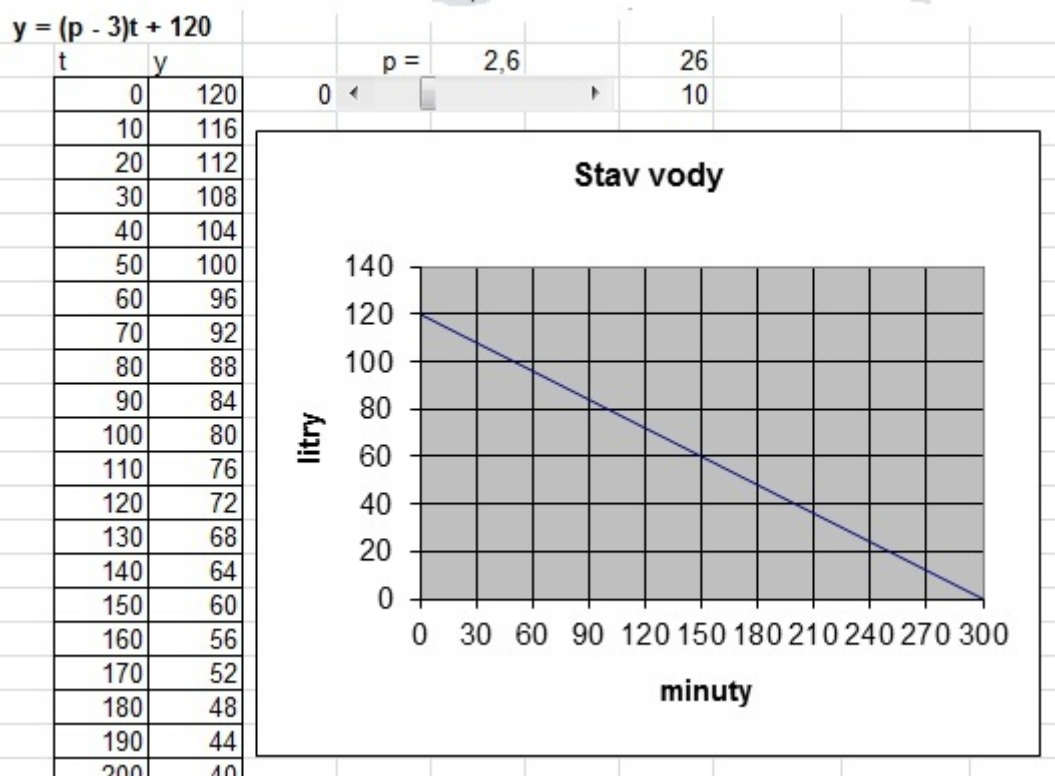
Metodické poznámky

Rozsah použití této úlohy závisí na záměru učitele. Lze doporučit, aby úlohu skutečně využil i pro kontakty s vhodným softwarem.

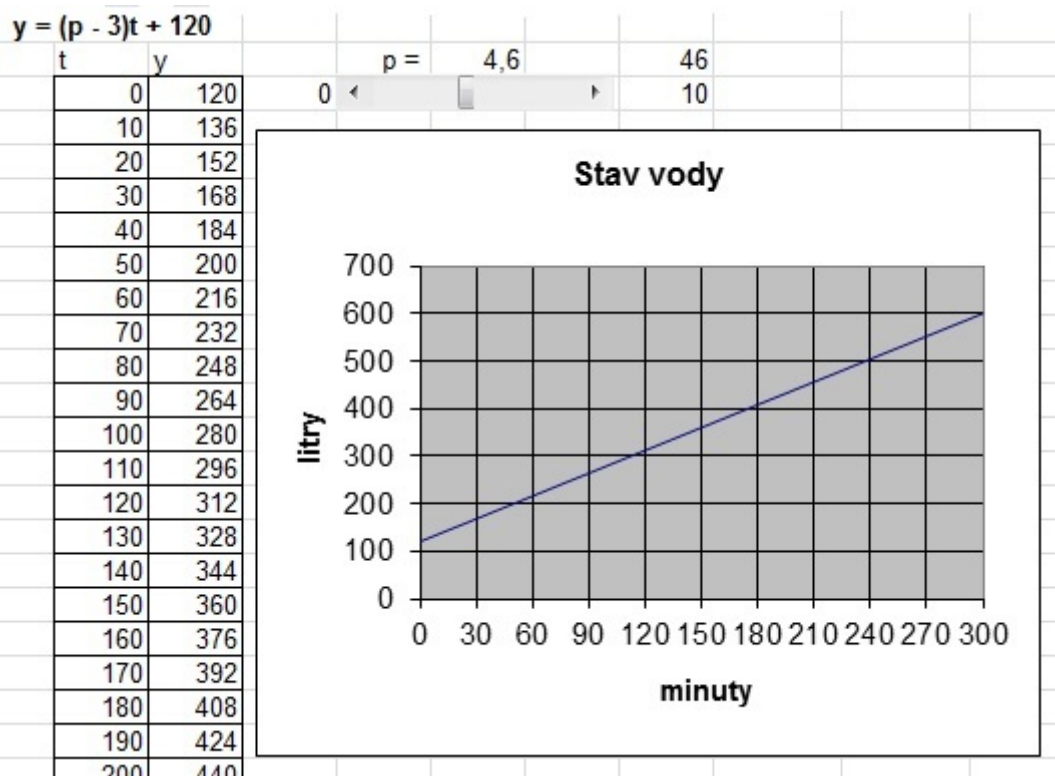
Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz



Tab. 1: Příklad vyprázdnění nádrže



Tab. 2: Příklad naplnění nádrže

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: nepřímá úměrnost, proměnná ve jmenovateli

Úloha 1 (úroveň 1-2)

Předpokládané znalosti: nepřímá úměrnost, tabulka a graf funkce, definiční obor

Žáci 5. třídy chtěli pro mateřskou školu sestavit 24 větrníčků. Jestliže se práce zúčastní x žáků, musí každý z nich vyrobit y větrníčků. Zatím nevíme, kolik žáků se sestavování větrníčků zúčastní.

- Zjistěte, jaké jsou možnosti a kolik řešení má tato úloha.
- Zadáním je definována funkce nepřímá úměrnost, napište její rovnici a stanovte její definiční obor.
- Znázorněte graf a určete definiční obor funkce bez závislosti na textu úlohy.

Řešení

- a) Všechny možnosti uvedeme do tabulky

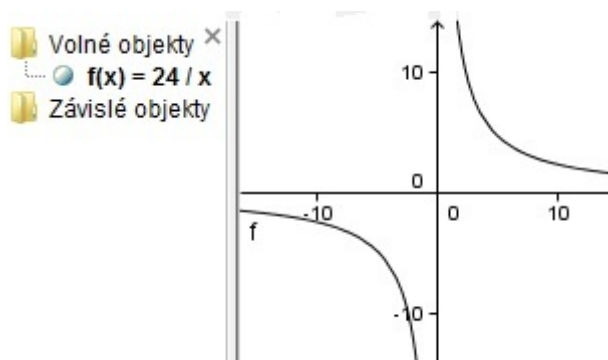
x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

Úloha má 8 řešení.

- b) Podle zadání platí $x \cdot y = 24$, z tohoto vztahu získáme rovnici funkce $y = \frac{24}{x}$.

Definičním oborem je množina $M = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$.

- c) Graf funkce $y = \frac{24}{x}$ znázorníme užitím Geogebry.



Definičním oborem je množina $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Metodické poznámky

K části a) by učitel měl pro silnější pocit žáků o spojení se životem vyvolat řízenou diskusi o tom, které řešení se asi uplatnilo v praxi. U částí b) a c) by si žáci měli uvědomit, že definiční obor funkce závisí na tom, co je tou funkcí vyjádřeno.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: nepřímá úměrnost, tabulka, kvadratické rovnice

Ema si v knihovně vypůjčila knihu o 480 stránkách. Řekla si, že každý den přečte stejný počet stránek (x) a spočítala si, kolik dní jí bude čtení trvat (y). Pak však zjistila, že musí knihu vrátit o 6 dní dříve, takže musí denně přečíst o 4 stránky více.

- Jaký je tedy její denní plán a za kolik dní knihu přečte?
- Jaké možnosti by Ema měla, kdyby musela knihu vrátit do dvou týdnů?
- Napište rovnice funkcí, které vyjadřují závislost počtu dní na denním počtu přečtených stránek podle původního plánu a podle plánu pozměněného.

Řešení

- a) Jestliže Ema chtěla původně přečíst denně x stránek, trvalo by jí to y dní, takže $x \cdot y = 480$. V nové situaci musí denně přečíst $x + 4$ stránky a bude jí to trvat $y - 6$ dní, takže

$$(x + 4)(y - 6) = xy = 480. \quad (1)$$

Odsud porovnáním prvních dvou výrazů v (1) máme

$$xy + 4y - 6x - 24 = xy$$

a z toho $y = \frac{3}{2}(x + 4)$; dosadíme do rovnosti druhých dvou výrazů v (1)

$$x \cdot \frac{3}{2}(x + 4) = 480 \Rightarrow x^2 + 4x - 320 = 0.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou řešíme.

$$\frac{1}{4}D = 4 + 320 = 324, \quad \sqrt{324} = 18; \quad x_{1,2} = -2 \pm 18.$$

Kladný kořen je $x_1 = 16$, pak $y_1 = \frac{480}{16} = 30$. Nový denní plán je o 4 stránky větší, tedy 20 stránek, a knihu přečte za $30 - 6 = 24$ dny. Zkouška: $20 \cdot 24 = 480$.

- b) Označme pro přehlednost v této části řešení d počet dní a s počet denně přečtených stránek. Máme zjistit všechny možnosti denního přidělu stránek, tj. všechna řešení. Rozložíme číslo 480 v součin prvočísel $480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, přidáme samozřejmého činitele 1 a vytváříme dělitele čísla 480 menší než 14, viz tabulku.

d	1	2	3	4	5	6	8	10	12
s	480	240	160	120	96	80	60	48	40

Zde jsou vypsány všechny možnosti.

- c) Podle (1) byl původní vztah $x \cdot y = 480$, takže rovnice příslušné funkce je $y = \frac{480}{x}$.
Nový vztah je $(x + 4)(y - 6) = 480 \Rightarrow y - 6 = \frac{480}{x+4}$, odkud $y = \frac{480}{x+4} + 6$.

Metodické poznámky

Je vhodné pojednat se žáky, co pro Emu znamená vypočtený počet denně přečtených stránek.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: nepřímá úměrnost, kvadratické rovnice, práce s délkovými jednotkami, celočíselná řešení

Pan Petr měl možnost vytýčit si obdélníkovou šestiarovou zahrádku, chce si ji pak oplotit a má k dispozici 120 m pletiva.

- a) Jaké jsou možnosti pro velikosti rozměrů jeho budoucí zahrádky?
b) Při oplocení budou sloupky plotu 2,5 m od sebe. Jaké rozměry tedy může mít zahrádka?
c) Znázorněte graf závislosti obvodu na délce jedné jeho strany.

Řešení

- a) Rozměry zahrádky označme x, y . Budeme počítat v metrech; když 6 arů převedeme na m^2 , bude výměra 600 m^2 . Platí tedy $x \cdot y = 600$. Obvod pozemku (délka plotu) bude $z = 2(x + y)$; dosadíme $y = \frac{600}{x}$ a máme $z = 2 \left(x + \frac{600}{x} \right)$ a protože ze zadání máme $z \leq 120$, dostáváme pro rozměr x nerovnici $2 \left(x + \frac{600}{x} \right) \leq 120$, tj.
 $x + \frac{600}{x} \leq 60$. V úloze zřejmě $x > 0$, nerovnici vynásobíme x a upravíme na tvar nerovnice kvadratické

$$x^2 - 60x + 600 \leq 0.$$

Vypočteme nulové body trojčlenu na levé straně nerovnice $D = 1200$, $\sqrt{D} \doteq 34,6$;

$$x_{1,2} = \frac{60 \pm 34,6}{2} = \begin{cases} 47,3 \\ 12,7 \end{cases}.$$

Kvadratickou nerovnici tak lze zapsat ve tvaru

$$(x - 12,7)(x - 47,3) \leq 0.$$

Uvedenými dvěma nulovými body se číselná osa rozdělí na 3 části; uvnitř levé části jsou oba činitele záporné a součin je kladný, uvnitř střední části je první činitel kladný a druhý záporný, takže součin je záporný, uvnitř pravé části jsou oba činitele kladné, jejich součin je kladný. Řešením je tak interval (zaokrouhleno na celá čísla) $\langle 13; 47 \rangle$, který platí pro oba rozměry.

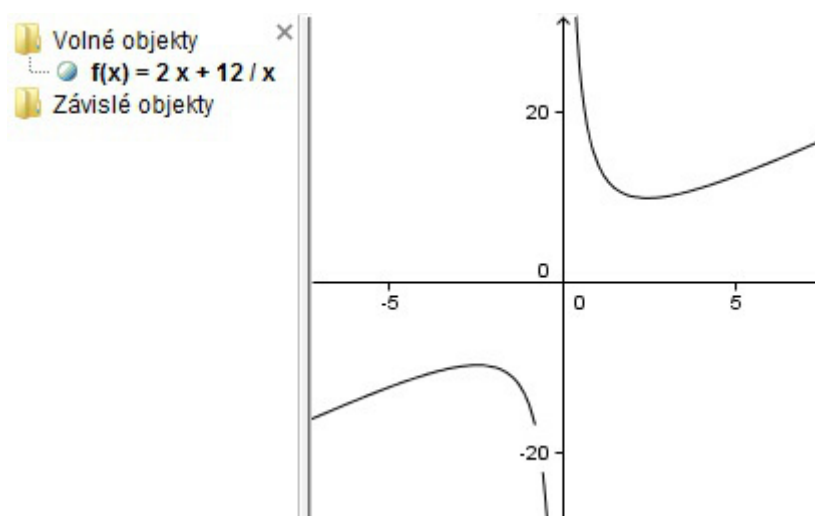
Závěr. Rozměry zahrádky musí být v intervalu od 13 m do 47 m.

- b) Kdyby byla zahrádka čtvercová, byla by délka jejích stran $\sqrt{600} \doteq 24,495$ m a to znamená, že kratší rozměr budeme hledat od 13 m do 24 m, ale vzhledem ke vzdálenosti sousedních sloupků jen od 15 m do 24 m. Proto vyzkoušíme hodnoty 15; 17,5; 20; 22,5.
 $y_1 = \frac{600}{15} = 40$, $\frac{600}{17,5}$ není celé číslo, $y_2 = \frac{600}{20} = 30$, $\frac{600}{22,5}$ není celé číslo.

Závěr. Jsou jen 2 možnosti rozměrů, a to 15 m $\times$ 40 m a 20 m $\times$ 30 m.

- c) Obvod uvažovaného obdélníku je podle části a) vyjádřen rovnicí $z = 2 \left(x + \frac{600}{x} \right)$.

Pro názornější obrázek v Geogebře zvolíme za jednotku 1 dam (dekametr) a zobrazíme funkci $y = 2 \left(x + \frac{6}{x} \right)$, tj. $y = 2x + \frac{12}{x}$. V obrázku byla upravena měřítko na osách.



Metodické poznámky

V průběhu řešení se vyskytují i některé nestandardní situace, kdy se řešitel musí rozhodnout, kterým směrem své řešení povede. V předchozím obrázku není zakreslena jedna asymptota, záleží na vyučujícím, jestli ji chce vyznačit a odůvodnit.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnick@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: obsahy a obvody mnohoúhelníků, grafy funkcí s absolutní hodnotou

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění soustavy nerovnic o dvou proměnných, absolutní hodnota, obsah a obvod trojúhelníku.

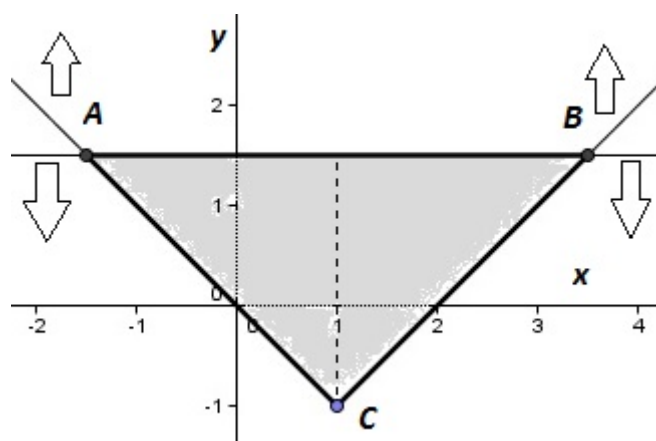
Zobrazte trojúhelník, který je průnikem množin

$$\begin{aligned}y &\geq |x - 1| - 1, \\ y &\leq 1,5.\end{aligned}$$

a vypočítejte jeho obvod s a obsah P .

Řešení (s použitím Geogebry)

Graficky zobrazíme rovnice $y = |x - 1| - 1$, $y = 1,5$ a dostaneme hranice zadaných množin.



V prvním případě dostáváme ramena pravého úhlu s vrcholem $C[1; -1]$, a pro $y > |x - 1| - 1$ jde o body nad těmi rameny, první množinou je tedy znázorněn pravý úhel. Ve druhém případě jde o dolní polorovinu s hranicí $y = 1,5$. Hledáme společné body obou částí hranic. Platí $1,5 = |x - 1| - 1$, odsud $|x - 1| = 2,5$. Pro $x \geq 1$ je $|x - 1| = x - 1$, takže $x - 1 = 2,5$ a odtud máme řešení $x = 3,5$. Pro $x < 1$ je $|x - 1| = -x + 1$, takže $-x + 1 = 2,5$ a z toho je $x = -1,5$. Dostali jsme tak dva společné body $A[-1,5; 1,5]$, $B[3,5; 1,5]$.

Trojúhelník ABC je zřejmě rovnoramenný a pravoúhlý, úhly při vrcholech A , B jsou 45° , $|AB| = 3,5 - (-1,5) = 5$. Vypočteme velikost $d = |AC| = |BC|$.

$$d = \sqrt{(1 + 1,5)^2 + (-1 - 1,5)^2} = \sqrt{2,5^2 + 2,5^2} = \sqrt{2 \cdot 2,5^2} = 2,5\sqrt{2}.$$

Obsah. Trojúhelník ABC je polovinou čtverce o straně d , takže $P = \frac{1}{2} \cdot 6,25 \cdot 2 = 6,25$.

Obvod. $s = 5 + 2 \cdot 2,5\sqrt{2} = 5(1 + \sqrt{2})$.

Metodické poznámky

Tato ani další úlohy nejsou řešeny Geogebrou, ta je zde použita jen pro grafické znázornění přímk, ramen úhlů a výsledného průniku.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění soustavy nerovnic o dvou proměnných, absolutní hodnota, obsah a obvod trojúhelníku, rozklad obrazce

Zobrazte rovinný obrazec, který je průnikem množin

$$\begin{aligned} |x| + 2y &\leq 4, \\ |x - 2| - 2y &\leq 2. \end{aligned}$$

a vypočítejte jeho obvod s a obsah P .

Řešení (s použitím Geogebry)

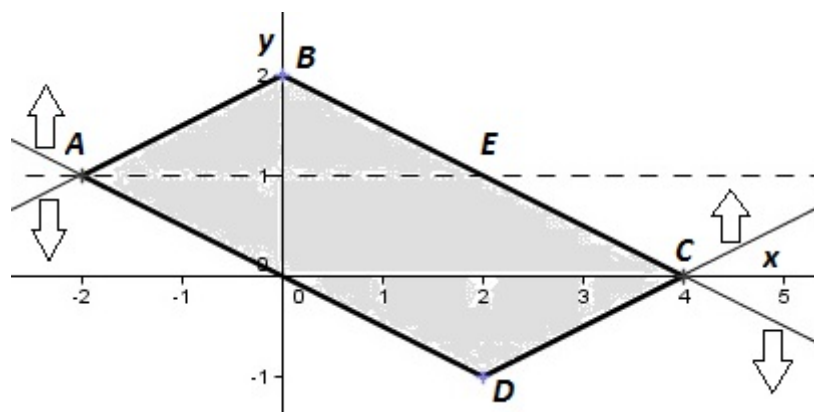
Nejprve si zobrazíme hranice. Zadané nerovnice upravíme na tvar

$$y \leq 2 - 0,5|x| \quad \text{a} \quad y \geq 0,5|x - 2| - 1$$

a vytvoříme z nich rovnice

$$y = 2 - 0,5|x| \quad \text{a} \quad y = 0,5|x - 2| - 1,$$

které s využitím Geogebry zobrazíme.



V prvním případě dostáváme ramena úhlu s vrcholem $B[0; 2]$, a pro $y < 2 - 0,5|x|$ jde o body pod těmito rameny, první množinou je tedy zadán konvexní úhel. Ve druhém dostáváme ramena úhlu s vrcholem $D[2; -1]$, a pro $y \geq 0,5|x - 2| - 1$ jde o body nad těmito rameny, druhou množinou je opět zadán konvexní úhel.

Hledáme společné body obou částí hranice. Platí $2 - 0,5|x| = 0,5|x - 2| - 1$; násobíme dvěma a upravíme

$$|x - 2| + |x| = 6.$$

Pro $x \geq 2$ je $|x-2| = x-2$, $|x| = x$, dostáváme $x-2+x = 6$, takže $x = 4$, $y = 2-0,5|4| = 0$.
 Pro $0 \leq x < 2$ je $|x-2| = 2-x$, $|x| = x$, dostáváme $2-x+x = 6$, řešení neexistuje.
 Pro $x < 0$ je $|x-2| = 2-x$, $|x| = -x$, dostáváme $2-x-x = 6$, takže $x = -2$,
 $y = 2-0,5|-2| = 1$. Dostali jsme tak dva společné body $A[-2; 1]$, $C[4; 0]$, zadaným rovinným obrazcem je rovnoběžník $ABCD$.

Obsah vypočteme tak, že rovnoběžník $ABCD$ rozdělíme přímkami $y = 1$ a $y = 0$ (osou x) na dva trojúhelníky AEB , ODC a rovnoběžník $A0CE$, jejichž potřebné rozměry dostaneme ze souřadnic bodů a obsahy se tak vypočtou velmi snadno. Trojúhelník AEB : základna $|AE| = 4$, výška je rovna 1, obsah je $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$; trojúhelník ODC má stejné rozměry (je s předchozím shodný), obsah je 2; rovnoběžník $A0CE$: $|AE| = 4$, výška je 1, takže obsah je 4.

Obsah rovnoběžníku $ABCD$ je tedy $P = 2 + 2 + 4 = 8$.

Výpočet obvodu: $|AB| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$; v tomto případě lze využít naprosto zřetelného zobrazení dalších stran, takže $|CD| = |AB| = \sqrt{5}$, $|AD| = |BC| = 2\sqrt{5}$.

Obvod $s = 6\sqrt{5}$.

Metodické poznámky

Obsah lze rovnoběžníku $ABCD$ lze vypočítat i jinými způsoby, žáci by je měli objevit.

Úloha 3 (úroveň 2-3)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění soustavy nerovnic o dvou proměnných, absolutní hodnota, obsah a obvod trojúhelníku, rozklad obrazce, počítání s obyčejnými zlomky

Zobrazte trojúhelník, který je průnikem množin

$$\begin{aligned} y &\leq 2,5 - |1 - x|, \\ 2x - 8y + 3 &\leq 0 \end{aligned}$$

a vypočtete jeho obvod s a obsah P .

Řešení (s použitím Geogebry)

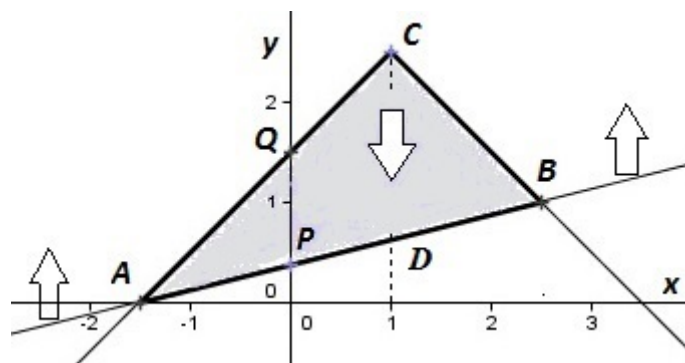
Graficky zobrazíme rovnici $y = 2,5 - |1 - x|$, druhou musíme nejprve upravit, aby se mohla zadat do Geogebry: $2x + 3 = 8y$, tedy $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$. V prvním případě dostáváme ramena pravého úhlu s vrcholem $C[1; 2,5]$ a pro $y < 2,5 - |1 - x|$ jde o body pod těmi rameny, první množinou je tedy znázorněn pravý úhel. Ve druhém případě vidíme, že po dosazení bodu $[0, 0]$ dostáváme $3 \leq 0$, počátek souřadnicové soustavy tedy nepatří do zadané poloroviny, takže jde o polorovinu nad touto přímkou.

Hledáme společné body obou částí hranice. Z vyjádření y z obou rovnic dostáváme

$$\frac{5}{2} - |1 - x| = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} \Rightarrow 2x + 8|1 - x| = 17.$$

Pro $x \leq 1$ je $|1 - x| = 1 - x$, takže

$$2x + 8 - 8x = 17, \quad 6x = -9, \quad x = -\frac{3}{2};$$



pak $y = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{3}{8} = 0$. Pro $x > 1$ je $|1 - x| = x - 1$, takže

$$2x + 8x - 8 = 17, \quad 10x = 25, \quad x = \frac{5}{2};$$

pak $y = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{8} = 1$. Dostali jsme tak dva společné body $A[-1,5;0]$, $B[2,5;1]$.

Výpočet obvodu: Délky stran počítáme jako přepony pomocných pravoúhlých trojúhelníků užitím Pythagorovy věty (nejsou zobrazeny). AB – jedna odvěsna má délku 4 (rozdíl x -ových souřadnic), druhá 1 (y -ová souřadnice bodu B); $|AB| = \sqrt{17}$. BC – jedna odvěsna má délku 1,5 (rozdíl x -ových souřadnic), druhá také 1,5 (rozdíl y -ových souřadnic), $|BC| = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2} = 1,5\sqrt{2}$. AC – jedna odvěsna má délku 2,5 (rozdíl x -ových souřadnic), druhá také 2,5 (y -ová souřadnice bodu C); $|AC| = \sqrt{2,5^2 + 2,5^2} = 2,5\sqrt{2}$.

Obvod trojúhelníku je $s = \sqrt{17} + 4\sqrt{2}$.

Výpočet obsahu – přímka $x = 1$ rozděluje trojúhelník ABC na dva trojúhelníky; pro $x = 1$ dostáváme ze druhé rovnice $y = \frac{5}{8}$. Označme bod $D[1; \frac{5}{8}]$; $|CD| = \frac{5}{2} - \frac{5}{8} = \frac{15}{8}$. V trojúhelníku ACD je výška na stranu CD rovna 2,5 (rozdíl x -ových souřadnic bodů A a C), v trojúhelníku CDB je výška na stranu CD rovna 1,5 (rozdíl x -ových souřadnic bodů B a C). Ze součtu obsahů obou dílčích trojúhelníků dostáváme:

Obsah trojúhelníku ABC je $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8} \cdot 4 = \frac{15}{4}$.

Metodické poznámky

Při výpočtu obsahu lze použít i rozdělení trojúhelníku přímkou $y = 1$. V této úloze se předpokládá provádění výpočtů užitím zlomků; to dává přesné výsledky.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění soustavy tří nerovnic o dvou proměnných, absolutní hodnota, obsah a obvod trojúhelníku a lichoběžníku, počítání s odmocninami

Zobrazte rovinný obrazec, který je průnikem množin

$$|x - 1| + y \leq 3,$$

$$|x - 1| + y \geq 1,$$

$$x - 3y \leq 0.$$

a vypočtete jeho obvod s a obsah P .

Řešení (s použitím Geogebry)

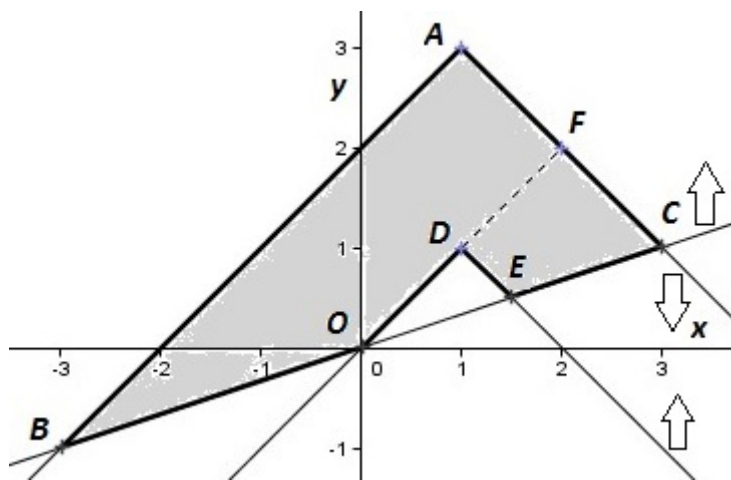
Nejprve si zobrazíme hranice. Zadané nerovnice upravíme na tvar

$$y \leq 3 - |x - 1|, \quad y \geq 1 - |x - 1| \quad \text{a} \quad y \geq \frac{1}{3}x$$

a vytvoříme z nich rovnice

$$y = 3 - |x - 1|, \quad y = 1 - |x - 1| \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{3}x,$$

které s využitím Geogebry zobrazíme.



V prvním případě dostáváme ramena úhlu s vrcholem $A[1; 3]$, a pro $y \leq 3 - |x - 1|$ jde o body pod těmito rameny, první množinou je tedy zadán pravý úhel. Ve druhém dostáváme ramena úhlu s vrcholem $D[1; 1]$, a pro $y \geq 1 - |x - 1|$ jde o body nad těmito rameny, druhou množinou je zadán nekonvexní úhel (doplňěk pravého úhlu). Ve třetím případě dostáváme hranici poloroviny a pro $y \geq \frac{1}{3}x$ jde o horní polorovinu. Výsledkem je nekonvexní šestiúhelník $ABODEC$. Najdeme souřadnice jeho vrcholů B, C . Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} y &= 3 - |x - 1|, \\ y &= \frac{1}{3}x, \end{aligned}$$

tedy položíme $3 - |x - 1| = \frac{1}{3}x$; pro $x \geq 1$ je $|x - 1| = x - 1$, odkud $3 - x + 1 = \frac{1}{3}x \Rightarrow x = 3$, $y = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$, $C[3; 1]$, pro $x < 1$ je $|x - 1| = -x + 1$, odkud $3 + x - 1 = \frac{1}{3}x \Rightarrow x = -3$, $y = \frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$, $B[-3; -1]$. Nyní hledáme souřadnice bodů O, E . Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} y &= 1 - |x - 1|, \\ y &= \frac{1}{3}x, \end{aligned}$$

tedy položíme $1 - |x - 1| = \frac{1}{3}x$; stejným postupem jako v předchozím případě dostáváme $O[0; 0]$, $E[1,5; 0,5]$.

Výpočet obvodu – $|OD|$ je velikost přepony jednotkového čtverce, tedy $|OD| = \sqrt{2}$. Vidíme, že

$$\begin{aligned}|AB| &= 4 \cdot |OD| = 4 \cdot \sqrt{2}, \\|CA| &= 2 \cdot |OD| = 2 \cdot \sqrt{2}, \\|DE| &= \frac{1}{2}|OD| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

$|BO|$ je přepona pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 1 a 3, takže $|BO| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,

$$|EC| = \frac{1}{2}|CO| = \frac{1}{2}|BO| = \frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Obvod šestiúhelníku $ABODEC$ je

$$\begin{aligned}s &= |AB| + |BO| + |OD| + |DE| + |EC| + |CA| = \\&= 4\sqrt{2} + \sqrt{10} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10} + 2\sqrt{2} = 7,5\sqrt{2} + 1,5\sqrt{10}.\end{aligned}$$

Výpočet *obsahu* – úsečka DF rozděluje daný šestiúhelník na dva lichoběžníky: $ABOF$ a $FDEC$, výška obou z nich je zřejmě $v = |FD| = \sqrt{2}$. Obsah lichoběžníku $ABOF$ je $P_1 = \frac{1}{2}v(|AB| + |OF|) = 6$. Obsah lichoběžníku $FDEC$ je $P_2 = \frac{1}{2}v(|FC| + |DE|) = 1,5$.
Obsah šestiúhelníku $ABODEC$ je $P = P_1 + P_2 = 6 + 1,5 = 7,5$.

Metodické poznámky

Obrázek je složitější a rozklad šestiúhelníku při výpočtu obsahu lze opět provést několika způsoby.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: kvadratická funkce, kvadratické rovnice a nerovnice, kvadratický trojčlen, absolutní hodnota

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: přenést slovní úlohu do matematiky, řešit kvadratickou rovnici

Zemědělec si na svém pozemku zřídil zeleninovou zahrádku obdélníkového tvaru, jejíž délka byla o 4 m větší než šířka. V příštím roce zvětšil délku o 8 m a šířku o 10 m a tím celkovou plošnou výměru zvětšil na dvojnásobek. Kolik arů má nyní jeho zahrádka?

Řešení

Původní délka zahrádky je x , původní šířka y , údaje jsou v metrech. Podle zadání platí $x = y + 4$, tj. $y = x - 4$, původní výměra zahrádky je $P = xy = x(x - 4)$. Nová délka zahrádky je $x + 8$, nová šířka $y + 10 = x - 4 + 10 = x + 6$, nová výměra je $P' = (x + 8)(x + 6)$. Platí $P' = 2P$, takže

$$(x + 8)(x + 6) = 2x(x - 4).$$

Roznásobíme a upravíme

$$x^2 + 14x + 48 = 2x^2 - 8x, \quad x^2 - 22x - 48 = 0.$$

Řešíme $D = 22^2 + 4 \cdot 48 = 676$, $\sqrt{D} = 26$,

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm 26}{2} = \begin{cases} 24 \\ -2 \end{cases}.$$

Zkouška pro kořen $x_1 = 24$. Původní zahrádka: $x = 24$, $y = 24 - 4 = 20$, $P = xy = 480$, nová zahrádka $P' = (24 + 8)(20 + 10) = 32 \cdot 30 = 960 = 2P$.

Kořen $x_2 = -2$ nevyhovuje, je záporný

Závěr. Zemědělcova zahrádka má nyní 960 m^2 , což je 9,6 arů.

Metodické poznámky

Ukázka, jak užitím matematiky řešit praktickou úlohu, matematickým modelem je tu jednoduchá kvadratická rovnice, kdy jeden kořen úloze vyhovuje a druhý ne. Účelem této úlohy je připomenout algoritmus řešení.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rozklad kvadratického trojčlenu, řešení nerovnic

Pro která x je funkce $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$ a) kladná, b) rovna nule, c) záporná?

Řešení (1)

Zjistíme nulové body: $D = 9 + 40 = 49$, $\sqrt{D} = 7$,

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ -1 \end{cases},$$

kvadratický trojčlen vyjádříme jako součin kořenových činitelů

$$f(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x + 1)$$

a probereme případy $f(x) > 0$ a $f(x) < 0$.

- $f(x) > 0$ právě když oba činitele jsou kladné nebo oba záporné

$$\begin{aligned} (x - \tfrac{5}{2} > 0) \wedge (x + 1 > 0), & \quad \text{tj.} \quad (x > \tfrac{5}{2}) \wedge (x > -1) \Rightarrow x > \tfrac{5}{2}, & \quad \text{tj.} \quad x \in (\tfrac{5}{2}; +\infty); \\ (x - \tfrac{5}{2} < 0) \wedge (x + 1 < 0), & \quad \text{tj.} \quad (x < \tfrac{5}{2}) \wedge (x < -1) \Rightarrow x < -1, & \quad \text{tj.} \quad x \in (-\infty; -1); \end{aligned}$$

- $f(x) < 0$ právě když jeden činitel je kladný a druhý záporný

$$\begin{aligned} (x - \tfrac{5}{2} > 0) \wedge (x + 1 < 0), & \quad \text{tj.} \quad (x > \tfrac{5}{2}) \wedge (x < -1), & \quad \text{takové } x \text{ neexistuje;} \\ (x - \tfrac{5}{2} < 0) \wedge (x + 1 > 0), & \quad \text{tj.} \quad (x < \tfrac{5}{2}) \wedge (x > -1) \Rightarrow -1 < x < \tfrac{5}{2}, & \quad \text{tj.} \quad x \in (-1; \tfrac{5}{2}). \end{aligned}$$

Závěr. Pro $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{5}{2}; +\infty)$ je daná funkce kladná, pro $x \in (-1; \frac{5}{2})$ je záporná, nule se rovná pro $x \in \{-1; \frac{5}{2}\}$.

Metodické poznámky

Toto je běžný postup použitelný i ve složitějších případech. Je možno však postupovat i jinak; víme, že kvadratická funkce zachovává znaménko v každém intervalu, kde nemá nulový bod, takže stačí jedním bodem vyzkoušet její znaménko v daném intervalu.

Řešení (2)

Nulové body kvadratické funkce rozdělí číselnou osu na tři intervaly s dělicími body -1 a $\frac{5}{2}$. $f(-2) = 8 + 6 - 5 = 9 > 0$, v intervalu $(-\infty; -1)$ je funkce kladná, $f(0) = -5 < 0$, v intervalu $(-1, \frac{5}{2})$ je funkce záporná, $f(3) = 18 - 9 - 5 = 4 > 0$, v intervalu $(\frac{5}{2}; +\infty)$ je funkce kladná.

Metodické poznámky

Vzhledem k jednoduchosti práce s Geogebrou lze doporučit, aby si žáci své výsledky ověřili zobrazením grafu zadané funkce.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: rozklad kvadratického trojčlenu, řešení nerovnic, práce s absolutní hodnotou

Pro která x je funkce $f(x) = 2x^2 - |x| - 6$ a) záporná, b) rovna nule, c) kladná?

Řešení

Řešení rozdělíme na dva případy.

- a) Pro $x \geq 0$ platí $|x| = x$, takže $f(x) = 2x^2 - x - 6$.

$$D = 1 + 48 = 49, \quad \sqrt{D} = 7, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{cases};$$

budeme pracovat jen s nulovým bodem $2 > 0$. Kvadratický trojčlen rozložíme $f(x) = 2(x - 2)(x + \frac{3}{2})$ s tím, že pro $x \geq 0$ je činitel $x + \frac{3}{2} > 0$. Pro $x < 2$ je $x - 2 < 0$, tedy $f(x) < 0$, přitom $f(0) = -6 < 0$, takže $f(x) < 0$ na intervalu $\langle 0; 2 \rangle$; pro $x > 2$ je $x - 2 > 0$, tedy $f(x) > 0$ na intervalu $(2; +\infty)$.

- b) Pro $x < 0$ platí $|x| = -x$, takže $f(x) = 2x^2 + x - 6$.

$$D = 1 + 48 = 49, \quad \sqrt{D} = 7, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{3}{4} \\ -2 \end{cases},$$

budeme pracovat jen s nulovým bodem $-2 < 0$. Kvadratický trojčlen rozložíme $f(x) = 2(x + 2)(x - \frac{3}{2})$ s tím, že pro $x < 0$ je činitel $x - \frac{3}{2} < 0$. Pro $x < -2$ je $x + 2 < 0$, tedy $f(x) > 0$, takže $f(x) < 0$ na intervalu $(-\infty; -2)$; pro $x > -2$ je $x + 2 > 0$, tedy $f(x) < 0$ na intervalu $(-2; 0)$.

Závěr. Pro $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ je funkce kladná, pro $x \in (-2; 2)$ je záporná a nule se rovná pro $x \in \{-2; 2\}$.

Metodické poznámky

I tato zadaná funkce je spojitá, takže i zde by bylo možno určovat znaménko funkce na intervalech, do nichž je číselná osa rozdělena nulovými body. Jen je třeba při zjišťování nulových bodů vyloučit ty falešné.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rozklad kvadratického trojčlenu, řešení nerovnic, práce s absolutní hodnotou, zvládnutí složitější organizace práce

Pro která x je funkce $f(x) = |x^2 - 2x| - 1$ a) záporná, b) rovna nule, c) kladná?

Řešení

Řešení rozdělíme na dva případy.

- a) Pro $x^2 - 2x \geq 0$ je $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Nejprve vyhodnotíme podmínku $x(x - 2) \geq 0$; nastávají dva případy: oba činitele jsou nezáporné, tj. $(x \geq 0) \wedge (x \geq 2) \Rightarrow x \in \langle 2; +\infty \rangle$, oba činitele jsou nekladné, tj. $(x \leq 0) \wedge (x \leq 2) \Rightarrow x \in (-\infty; 0]$; (použili jsme „nekladné“, aby nám nevypadla nula).

Shrnutí. Podmínka $x^2 - 2x \geq 0$ je splněna pro $x \in (-\infty; 0] \cup \langle 2; +\infty \rangle = M_1$.

Na množině M_1 budeme nyní vyšetřovat funkci $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

$$D = 4 + 4 = 8, \quad \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

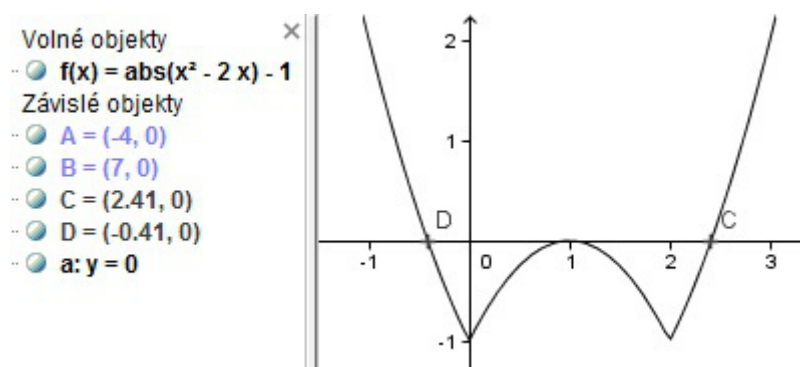
Zjistíme, který z těchto bodů leží v M_1 : $x_1 = 1 + \sqrt{2} \doteq 2,41 > 2$, takže $x_1 \in M_1$, $x_2 = 1 - \sqrt{2} \doteq -0,41 < 0$, takže i $x_2 \in M_1$, oba jsou to nulové body funkce $f(x)$. V M_1 tak platí $f(x) = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.

V intervalu $\langle 2; +\infty \rangle \subset M_1$ je $x > 1 + \sqrt{2}$, tedy $x - 1 + \sqrt{2} > 0$; tento interval je bodem $1 + \sqrt{2}$ rozdělen na dva. Pro $x < 1 + \sqrt{2}$ je $x - 1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow$ na intervalu $\langle 2; 1 + \sqrt{2} \rangle$ je $f(x) < 0$; pro $x > 1 + \sqrt{2}$ je $x - 1 - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ na intervalu $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$ je $f(x) > 0$.

V intervalu $(-\infty; 0) \subset M_1$ je $x < 1 + \sqrt{2}$, tedy $x - 1 - \sqrt{2} < 0$. Tento interval je bodem $1 - \sqrt{2}$ rozdělen na dva. Pro $x < 1 - \sqrt{2}$ je $x - 1 + \sqrt{2} < 0 \Rightarrow$ na intervalu $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$ je $f(x) > 0$; pro $x > 1 - \sqrt{2}$ je $x - 1 + \sqrt{2} > 0 \Rightarrow$ na intervalu $(1 - \sqrt{2}; 0)$ je $f(x) > 0$.

- b) Necht' nyní $x^2 - 2x < 0$ je $f(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2$. Tato podmínka je splněna na $\mathbb{R} \setminus M_1$, tj. na intervalu $(0; 2)$. Vidíme, že funkce $f(x)$ má nulový bod 1 a jinak je záporná.

Závěr. Funkce $f(x)$ je kladná pro $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$, je rovna 0 pro $x \in \{1 - \sqrt{2}; 1; 1 + \sqrt{2}\}$ a je záporná pro $x \in (1 - \sqrt{2}; 1) \cup (1; 1 + \sqrt{2})$.



Metodické poznámky

Toto řešení je pro žáky náročné zejména tím, že si musí stále uvědomovat, ve které fázi vstupních podmínek se při řešení postupně nacházejí. Lze doporučit, aby si pak žáci zobrazili graf funkce v Geogebře, viz obrázek výše.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: funkce, funkční hodnota, kvadratická funkce, lineární funkce, průsečíky grafů funkcí

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: lineární a kvadratická funkce, soustava dvou rovnic, kvadratická rovnice

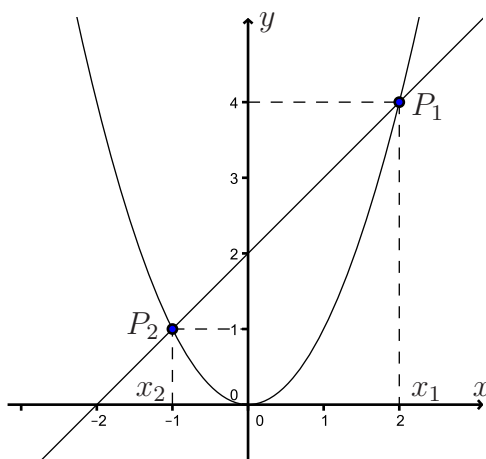
Určete průsečíky grafu funkce $y = x^2$ a přímky $y = x + 2$. Řešte početně i graficky.

Řešení (početně)

Průsečíky grafů funkcí splňují obě rovnice, řešíme tedy soustavu rovnic $y = x^2$ a $y = x + 2$. Porovnáním levých a pravých stran dostáváme kvadratickou rovnici $x^2 = x + 2$, tedy $x^2 - x - 2 = 0$, jejímž řešením jsou čísla $x_1 = 2$ a $x_2 = -1$. Odpovídající y -ové souřadnice jsou $y_1 = 4$ a $y_2 = 1$.

Řešení (graficky)

Grafem funkce $y = x^2$ je parabola, jejímž vrcholem je bod $[0; 0]$, grafem lineární funkce $y = x + 2$ je přímka, která prochází např. body $[-2; 0]$, $[0; 2]$. Průsečíky grafů jsou body $P_1 [2; 4]$ a $P_2 [-1; 1]$.



Metodické poznámky

Úloha kombinuje početní a grafické řešení, navazuje na ni úloha 2.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: soustava dvou rovnic, kvadratická rovnice s parametrem, lineární a kvadratická funkce

Po hodině matematiky zůstal na tabuli graf funkce $y = x^2$ a 2012 přímek rovnoběžných s přímkou $y = x$, každá z nich protínající parabolu ve dvou bodech. Najděte součet x -ových souřadnic průsečíků přímek a paraboly.

Řešení

Přímka rovnoběžná s přímkou $y = x$ bude mít rovnici $y = x + q$. Abychom určili průsečík této přímky s parabolou, řešíme soustavu rovnic s parametrem $q \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}y &= x + q, \\ y &= x^2.\end{aligned}$$

Porovnáním levých a pravých stran dostáváme rovnici s parametrem q : $x^2 - x - q = 0$. Diskriminant této rovnice je $D = 1 + 4q$, řešením jsou kořeny

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4q}}{2} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1+4q}}{2},$$

tedy x -ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Jejich součet je $x_1 + x_2 = 1$. Protože tento součet platí pro každou přímku s rovnicí $y = x + q$ a přímek je podle zadání 2012, součet x -ových souřadnic průsečíků všech přímek a paraboly je 2012.

Metodické poznámky

V úloze určujeme průsečíky přímky s parabolou, jejich x -ové souřadnice dostaneme řešením kvadratické rovnice s parametrem.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: soustavy rovnic, funkce, funkční hodnota

Nechť funkce f zobrazuje množinu kladných reálných čísel do množiny reálných čísel a pro každé kladné reálné číslo x platí

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x.$$

Vypočtete $f(6)$.

Řešení

Abychom vypočítali $f(6)$, dosadíme do rovnice $2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$ za $x = 6$. Dostaneme rovnici

$$2f(6) + 3f\left(\frac{2010}{6}\right) = 5 \cdot 6.$$

Druhou rovnici dostaneme, pokud za x dosadíme $\frac{2010}{6} = 335$:

$$2f(335) + 3f\left(\frac{2010}{335}\right) = 5 \cdot 335.$$

Máme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned}2f(6) + 3f(335) &= 30, \\2f(335) + 3f(6) &= 1675.\end{aligned}$$

Soustavu řešíme např. sčítací metodou, stačí určit neznámou $f(6)$:

$$\begin{aligned}4f(6) + 6f(335) &= 60, \\9f(6) + 6f(335) &= 5025.\end{aligned}$$

Odečtením rovnic dostaneme řešení

$$f(6) = 993.$$

Metodické poznámky

Funkcionální rovnice nejsou součástí RVP G, uvedená úloha však nevyžaduje znalost řešení funkcionálních rovnic, s neznámými funkčními hodnotami v soustavě rovnic pracujeme jako s neznámými x, y .

Zdroj: archiv autora, zadání soutěže Matematický klokan 2010

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Ivana Machačíková; machacikova@gymz1.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: kvadratická funkce

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: úprava kvadratického trojčlenu na druhou mocninu dvojčlenu, řešení kvadratické rovnice.

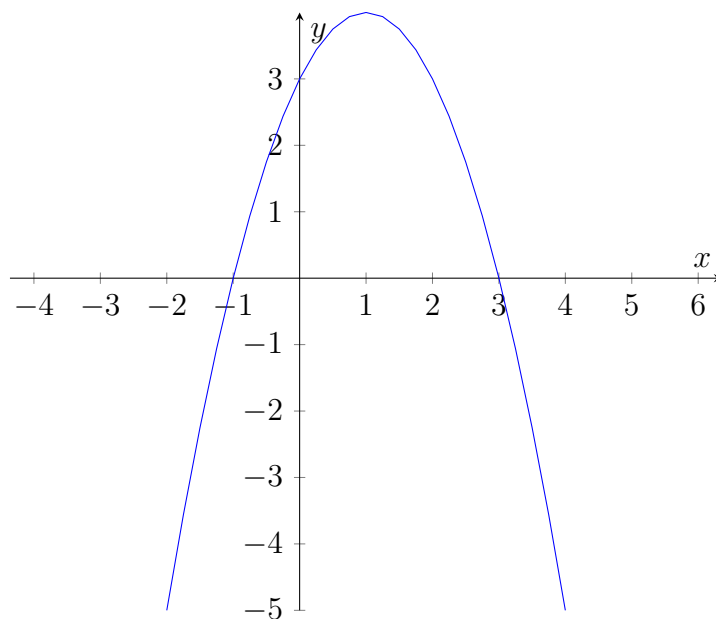
Sestrojte graf funkce $f: y = -x^2 + 2x + 3$. Na základě znalosti grafu této funkce řešte nerovnici $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Řešení

Souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem funkce f , určíme doplněním na druhou mocninu dvojčlenu

$$-x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 3 + 1 = -(x - 1)^2 + 4$$

Vrchol paraboly má souřadnice $V[1; 4]$. Protože u kvadratického členu je koeficient -1 , bude vrchol paraboly maximem této funkce (parabola bude „otočená“ dolů). V posunutě soustavě souřadnic $O'x'y$ ($O' = V$) budeme sestrojovat graf funkce $f': y' = -x'^2$.



Obr. 1: Graf funkce f

Hledáme, pro která x je graf funkce f „pod osou“ x . Průsečíky s osou x najdeme jako kořeny kvadratické rovnice $-x^2 + 2x + 3 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Závěr. Řešením dané nerovnice je množina $K = (-\infty; -1) \cup \langle 3; \infty)$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: práce s absolutní hodnotou

Sestrojte graf funkce $g: y = |x^2 - 2x| - 3$.

Řešení

Z předpisu funkce je evidentní, že definičním oborem jsou všechna reálná čísla. Další postup řešení pokračuje odstraněním absolutní hodnoty. Výraz $x^2 - 2x$ upravíme na součin $x(x - 2)$ a přímo vidíme, že je záporný pro $x \in (0; 2)$. Pro $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty)$ je výraz $x^2 - 2x$ nezáporný. Další postup se rozpadá na dvě části.

- a) Řešíme pro $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty)$. Pro tato x má funkce g předpis $g: y = x^2 - 2x - 3$. Dále postupujeme jako v úloze číslo 1. Stanovíme vrchol paraboly, která je grafem uvedené funkce

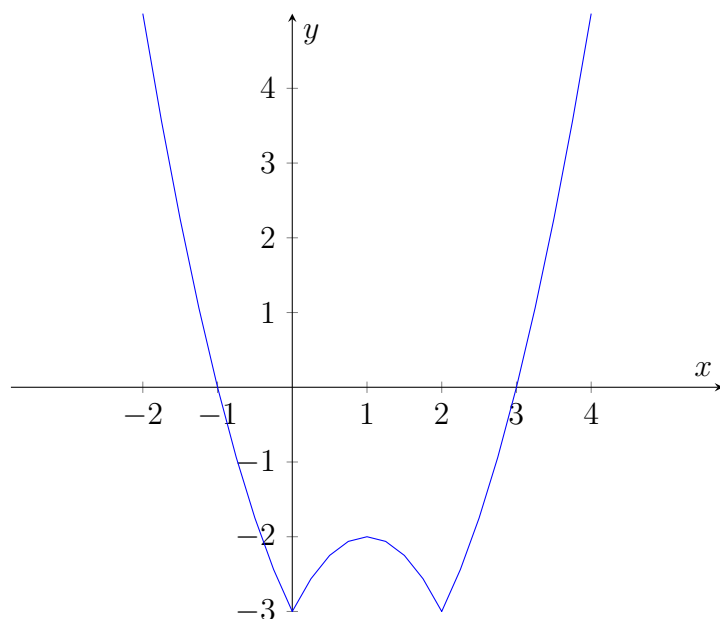
$$x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 3 - 1 = (x - 1)^2 - 4,$$

hledané souřadnice vrcholu jsou $V_1[1; -4]$. Sestrojíme graf funkce $y = x^2 - 2x - 3$ bez ohledu na podmínku pro x . V tomto případě má funkce ve vrcholu V_1 minimum a důležité je také stanovení funkčních hodnot pro krajní body intervalů, které omezují proměnnou x . Pro $x = 0$ je $y = -3$ a pro $x = 2$ je také $y = -3$. Nyní vyznačíme tu část, která odpovídá podmínce $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 2; \infty)$.

- b) Řešíme pro $x \in (0; 2)$. Pro tato x má funkce g předpis $g: y = -x^2 + 2x - 3$. Stanovíme vrchol paraboly, která je grafem uvedené funkce

$$-x^2 + 2x - 3 = -(x^2 - 2x + 1) - 3 + 1 = -(x - 1)^2 + 2,$$

hledané souřadnice vrcholu jsou $V_2[1; 2]$. Opět sestrojíme graf funkce $y = -x^2 + 2x - 3$ bez ohledu na podmínku pro x . V tomto případě má funkce ve vrcholu V_2 maximum. Ačkoliv omezující interval je otevřený, určíme hodnoty pro krajní body, jako by byly jeho součástí. Musí být stejné, neboť jsou to společné body obou parabol, které jsou grafy dílčích funkcí. Je to pro nás také kontrola správnosti výpočtu. Pro $x = 0$ je $y = -3$ a pro $x = 2$ je také $y = -3$. Nyní vyznačíme tu část, která odpovídá podmínce $x \in (0; 2)$.



Obr. 2: Graf funkce g

Sjednocením obou vytažených částí získáváme hledaný graf.
Pro úplnost stanovíme obor hodnot, kterým je interval $\langle 3; \infty \rangle$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: úprava kvadratického trojčlenu na druhou mocninu dvojčlenu, eliminace parametru.

Sestrojte grafy funkcí $f_1: y = x^2 + 2x + 5$, $f_2: y = x^2 + 4x + 5$. Určete množinu všech vrcholů parabol, které jsou grafy funkcí $y = x^2 + bx + 5$, kde b je libovolné reálné číslo.

Řešení

Nalezení grafů funkcí f_1 a f_2 , respektive jejich vrcholů, představují konkrétní případy parametrické úlohy. Cílem úlohy je ukázat vliv parametru b na průběh kvadratické funkce.

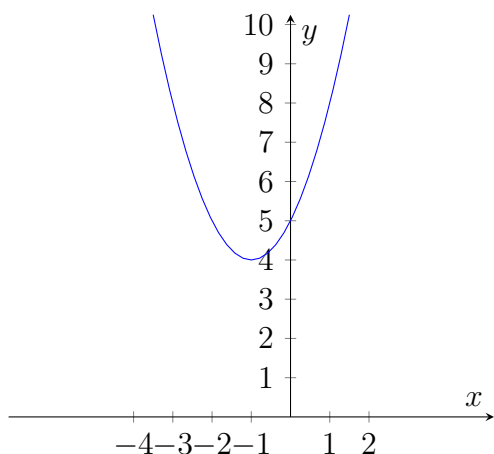
Konstrukce grafů funkcí f_1 a f_2 je základní úkol. Postupujeme stejně jako v úloze 1. Stanovíme vrcholy obou funkcí a vzhledem k tomu, že koeficient kvadratického členu je 1, posuneme graf funkce $y = x^2$ tak, aby její vrchol splynul s vypočtenou hodnotou vrcholů pro funkce f_1 a f_2 .

$$\begin{aligned} f_1: y &= x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4, & V_1[-1; 4] \\ f_2: y &= x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1, & V_1[-2; 1] \end{aligned}$$

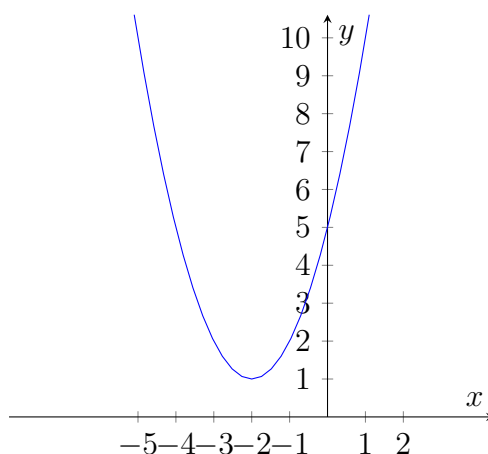
Z obou grafů je evidentní, že koeficient u lineárního členu nemá vliv na tvar paraboly, která je grafem kvadratické funkce. Jeho vliv spočívá v posuvu a to ve směru osy x i y . Další část úlohy toto tvrzení upřesní.

Provedeme úpravu předpisu na tvar, ze kterého lze určit souřadnice vrcholu.

$$y = x^2 + bx + 5 = \left(x^2 + 2\frac{b}{2}x + \frac{b^2}{4}\right) + 5 - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 5 - \frac{b^2}{4}.$$



Obr. 3: Graf funkce f_1



Obr. 4: Graf funkce f_2

Obě souřadnice vrcholu jsou závislé na parametru b , tedy koeficientu u lineárního členu. Konkrétně $x_V = -\frac{b}{2}$, $y_V = 5 - \frac{b^2}{4}$. Pro určení množiny vrcholů stačí eliminovat parametr b a tím získáme vztah mezi y_V a x_V , který je analytickým vyjádřením hledané množiny. Konkrétně $y_V = 5 - x_V^2$, což je předpis kvadratické funkce, jejímž grafem je parabola s vrcholem o souřadnicích $[0; 5]$. Na obrázku jsou obě funkce f_1 , f_2 a hledaná množina všech vrcholů.

Závěr. Hledaná množina všech vrcholů parabol $y = x^2 + bx + 5$ je parabola $y = 5 - x^2$.

Metodické poznámky

Konstrukce grafu kvadratické funkce musí zvládnout každý středoškolák a je výchozím bodem řady různě komplikovaných úloh. Je velmi vhodné spojit graf kvadratické funkce s řešením kvadratické nerovnice, případně pro vnímavější studenty zařadit parametr. Spojení konstrukce grafu kvadratické funkce s absolutní hodnotou generuje poměrně velké množství úloh. Jednu skupinu úloh lze řešit na základě souměrností podle souřadnicových os, druhou skupinu úloh řešíme rozбором absolutní hodnoty. Takový postup je ukázán právě v úloze č. 2. Třetí úloha v sobě sdružuje znalosti kvadratické funkce a hledání množiny bodů daných vlastností. Běžně se zkoumá význam koeficientu u kvadratického členu a ve speciálním případě význam absolutního členu. Jak se chová průběh grafu kvadratické funkce při změně koeficientu u lineárního členu demonstruje třetí úloha. Je určena nadanějším studentům. Při řešení by na celý postup měli přijít sami, přednesení učitelem by hodně ubralo na zajímavosti.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: polynommické funkce, monotonie funkce, nulová místa, spojitost

Úloha 1 (úroveň 1-2)

Předpokládané znalosti: dělení polynomů, nulové body, lokální extrémů funkcí

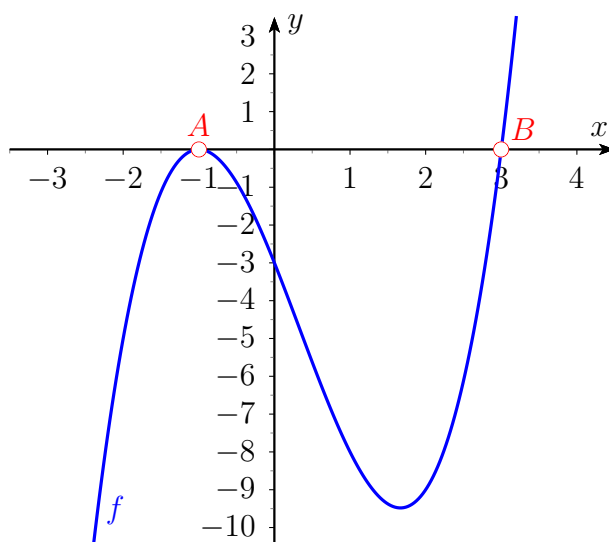
Je dán polynom $f(x): y = x^3 - x^2 - 5x - 3$. Najděte jeho nulové body a načrtněte graf.

Řešení

Polynom můžeme rozložit v součin $f(x) : y = x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(x + 1)^2$.

Nulové body jsou tedy $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, přičemž $x_1 = -1$ je „dvojnásobným“ nulovým bodem – pro graf funkce to znamená, že křivka pokračuje ve stejné polorovině (graf se „odráží“ od osy x).

Funkce je v rostoucí v intervalu $(-\infty; -1)$, v bodě $x_1 = -1$ má nulový bod a současně lokální maximum, v intervalu $(-1; \frac{5}{3})$ klesá, v bodě $\frac{5}{3}$ má lokální minimum, na intervalu $(\frac{5}{3}; \infty)$ roste a další nulový bod je $x_2 = 3$.



Metodické poznámky

Chování grafu v okolí „dvojnásobného“ nulového bodu – zde je vhodné připomenout grafické řešení kvadratické rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: dělení polynomů, rozklad polynomů v součin, binomická věta

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = 0$.

Řešení

Využijme následující věty:

Pokud má polynomická rovnice s celočíselnými koeficienty celočíselný kořen x_0 , pak tento dělí absolutní člen.

Pokud má daná rovnice celočíselné kořeny, mohou to být dle předchozí věty pouze čísla: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$. Dosazením zjistíme, že vyhovují čísla 1, 2, -3.

Výraz na levé straně rovnice tedy lze rozložit na součin kořenových činitelů

$$(x-1)(x-2)^2(x+3) \Rightarrow x=2 \text{ je dvojnásobným kořenem.}$$

Metodické poznámky

- Je vhodné ukázat důkaz. Zřejmě platí: $a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = 0$. Z prvních n členů můžeme vytknout x_0

$$x_0 (a_n x_0^{n-1} + \dots + a_2 x_0 + a_1) + a_0 = 0.$$

V závorce je celé číslo, označme ho M . Platí

$$Mx_0 + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -Mx_0 \Rightarrow x_0 | a_0.$$

- Pro usnadnění rozkladu polynomů v součin je vhodné zavést a použít Hornerovo schéma.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: průběh polynomické funkce, bod nespojitosti funkce, extrémy funkce

V oboru reálných čísel řešte nerovnici

$$\frac{(x+2)(x-4)^2(x+5)^5}{(x-1)(x-3)^4(x-6)^7} \geq 0.$$

Řešení

Pokud je podíl polynomů $\frac{f(x)}{g(x)}$ v zadané nerovnici nezáporný, je také jejich součin $f(x)g(x)$ nezáporný, tedy

$$(x+2)(x-4)^2(x+5)^5(x-1)(x-3)^4(x-6)^7 \geq 0, \text{ kde } x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3, 6\}.$$

K určení oboru pravdivosti nerovnice využijeme grafu funkce

$$y = f(x)g(x). \tag{1}$$

Vzhledem ke spojitosti polynomických funkcí postačí jeho průběh v blízkosti osy x pomocí nulových bodů a bodů nespojitosti funkce $g(x)$.

Pro $x \in (-\infty; -5)$ nabývá funkce (1) kladných hodnot a je klesající, v bodě $x = -5$ má nulové místo, v intervalu $(-5; -2)$ nabývá záporných hodnot a má zde lokální maximum. Číslo $x = -2$ je nulovým bodem, pro $x \in (-2; 1)$ je funkce kladná, v intervalech $(1; 3)$ a $(3; 4)$ záporná. Číslo $x = 4$ je nulovým bodem, v intervalu $(4; 6)$ je funkce záporná a v intervalu $(6; \infty)$ kladná.

Oborem pravdivosti nerovnice je tedy sjednocení intervalů

$$P = (-\infty; -5) \cup (-2; 1) \cup \{4\} \cup (6; \infty).$$

Metodické poznámky

Úlohu lze řešit jako klasickou nerovnici. Řešení užitím vlastností polynomických funkcí je elegantnější a kratší.

Další úlohy

1. Řešte rovnice v oboru reálných čísel:

a) Určete kvadratickou funkci, víte-li, že $f(0) = 7$, $f(-1) = 15$ a $f(8) = 159$.

$$[y = 3x^2 - 5x + 7]$$

b) Najděte nulová místa funkce $f(x): y = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

$$[P = \{-1, 3\}, \text{ kde } -1 \text{ je dvojnásobný}]$$

c) Rovnice $x^3 + cx + d = 0$ má dva různé reálné kořeny x_1, x_2 . Určete koeficienty c, d , víte-li, že $x_1 = 1$.

$$[(-3; 2), (-\frac{3}{4}; -\frac{1}{4})]$$

d) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici: $x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = 0$

$$[x = -2]$$

Zdroj: archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.; vladimir.vanek@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: složená funkce, kvadratická, kubická funkce, funkce s absolutní hodnotou

Úloha 1 (úroveň 1–2)

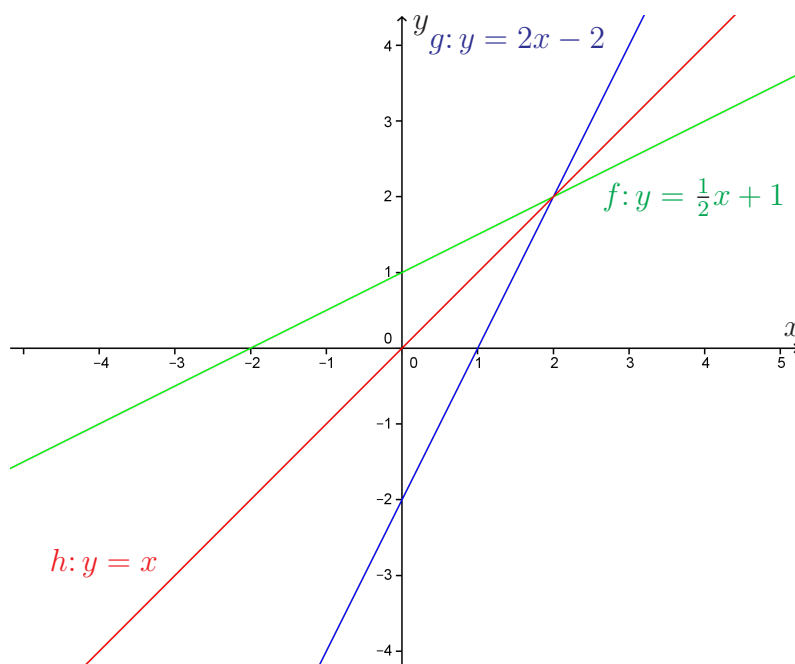
Předpokládané znalosti: lineární, složená funkce, inverzní funkce

Jsou dány dvě funkce $f: y = \frac{1}{2}u + 1$ a $g: u = 2x - 2$. Napište předpis složené funkce $h: y = f(g(x))$, nakreslete do jednoho obrázku grafy těchto funkcí.

Řešení

Zápis složené funkce vytvoříme tak, že funkční hodnotu funkce g dosadíme jako argument do funkce f . Zapišeme $h: y = \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x$.

Nakreslíme grafy.



Závěr. Dané funkce jsou prosté a navzájem inverzní, složená funkce je $h: y = x$.

Metodické poznámky

Je třeba zdůraznit, že skládání funkcí není komutativní. Příklad můžeme změnit tak, že zadáme vnější funkci f a žáci určí vnitřní funkci tak, aby funkce byly inverzní, nebo naopak uvedou příklad, kdy se o inverzní funkci nejedná.

Úloha 2 (úroveň 2)

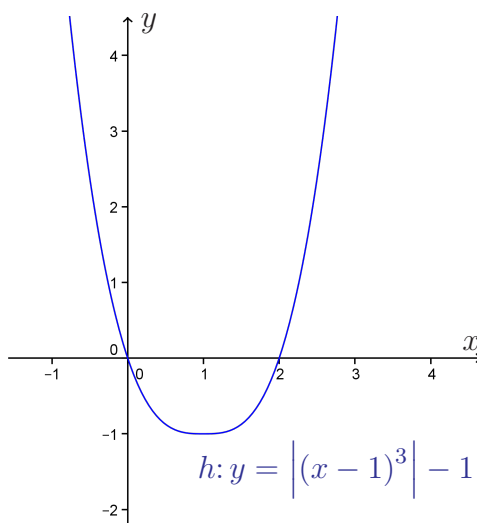
Předpokládané znalosti: lineární, složená funkce, kubická funkce, funkce s absolutní hodnotou

Jsou dány dvě funkce $f: y = |u| - 1$ a $g: u = (x - 1)^3$. Napište předpis složené funkce $h: y = f(g(x))$, určete její definiční obor a obor hodnot a nakreslete graf složené funkce.

Řešení

Zápis složené funkce vytvoříme tak, že funkční hodnotu funkce g dosadíme jako argument do funkce f . Zapišeme $h: y = |(x - 1)^3| - 1$.

Graf.



Závěr. Složená funkce $h: y = |(x - 1)^3| - 1$ má zřejmě definiční obor $\mathbb{R}$ a obor hodnot $\langle -1; \infty \rangle$.

Metodické poznámky

V této úloze je vhodné upozornit na to, že již funkce f i g jsou složené.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: složená funkce, definiční obor, odmocnina, derivace složené funkce

Jsou dány dvě funkce $f: y = \sqrt[4]{u + 1}$ a $g: u = \cos x$. Určete definiční obory těchto funkcí. Napište předpis složené funkce $h: y = f(g(x))$, vypočítejte první derivaci složené funkce h .

Řešení

Definičním oborem funkce $g: u = \cos x$ je množina všech reálných čísel, obor hodnot $u = \cos x$ je interval $\langle -1; 1 \rangle$. Definičním oborem funkce $f: y = \sqrt[4]{u + 1}$ je interval $\langle -1; \infty \rangle$, proto definiční obor funkce složené je množina všech reálných čísel.

Zápis složené funkce vytvoříme tak, že funkční hodnotu funkce g dosadíme jako argument do funkce f . Zapišeme $h: y = \sqrt[4]{\cos(x) + 1}$.

Derivujeme podle pravidel pro derivaci složených funkcí.

$$y = \sqrt[4]{\cos(x) + 1},$$
$$y' = \frac{1}{4} (1 + \cos x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{4\sqrt[4]{(1 + \cos x)^3}}.$$

Metodické poznámky

Derivace složené funkce není v RVP, byla využita vzhledem k tomu, že příklad je určen pro úroveň 3.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: kvadratická funkce, mocninné funkce, funkce druhá a třetí odmocnina

Úloha 1 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: základní pojmy – funkce, graf funkce, definiční obor a obor hodnot funkce, inverzní funkce, funkce $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$

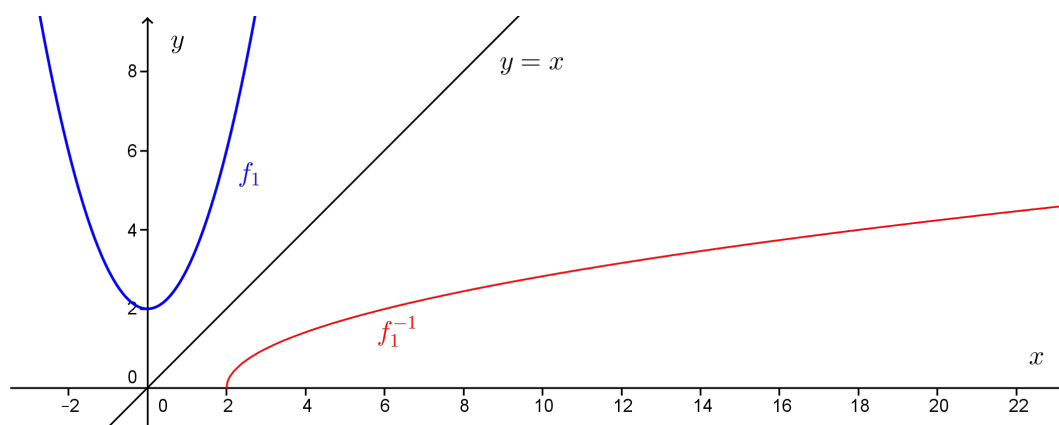
Nakreslete graf funkce a) $f_1: y = x^2 + 2$, b) $f_2: y = x^3 - 1$. Určete její definiční obor a obor hodnot. Pokud k dané funkci existuje funkce inverzní, určete její předpis, nakreslete její graf v téže soustavě souřadnic, určete její definiční obor a obor hodnot.

Řešení

- a) Grafem funkce $f_1: y = x^2 + 2$ je parabola s vrcholem $[0; 2]$. $D(f_1) = \mathbb{R}$, $H(f_1) = \langle 2; +\infty \rangle$.

Pokud uvažujeme pouze část definičního oboru funkce f_1 , v níž je funkce prostá, tj. interval $\langle 0; +\infty \rangle$, lze definovat inverzní funkci $f_1^{-1}: y = \sqrt{x - 2}$. Graf funkce f_1^{-1} můžeme získat jako obraz grafu funkce f_1 v osově souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$.

$$D(f_1^{-1}) = \langle 2; +\infty \rangle, \quad H(f_1^{-1}) = \langle 0; +\infty \rangle.$$

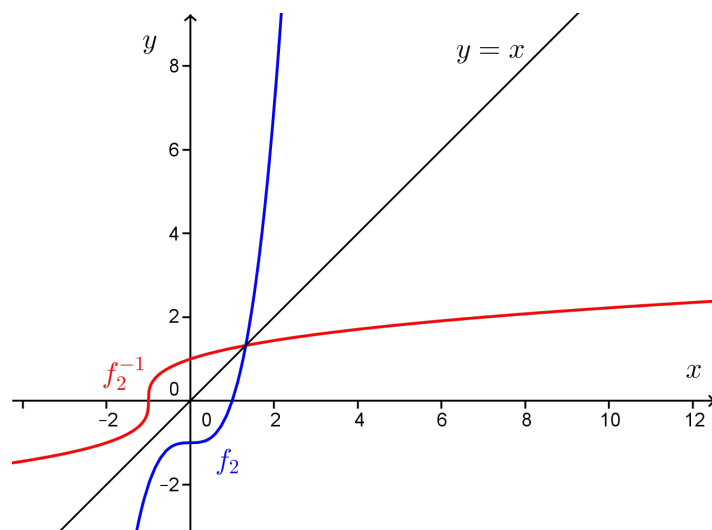


Obr. 1a

- b) Grafem funkce $f_2: y = x^3 - 1$ je kubická parabola procházející body $[0; -1]$, $[-1; -2]$, $[1; 0]$. $D(f_2) = H(f_2) = \mathbb{R}$.

Funkce f_2 je prostá v celém svém definičním oboru, proto k ní existuje funkce inverzní $f_2^{-1}: y = \sqrt[3]{x + 1}$. Graf funkce f_2^{-1} můžeme získat jako obraz grafu funkce f_2 v osově souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$.

$$D(f_2^{-1}) = H(f_2^{-1}) = \mathbb{R}.$$



Obr. 1b

Metodické poznámky

Při kreslení grafu funkcí je užít posunutí. Graf funkce $y = f(x - m) + n$ lze sestavit jako obraz grafu funkce $y = f(x)$ v posunutí, které je určeno vektorem (m, n) . Pro funkci f_1 to znamená, že její graf získáme posunutím grafu funkce $y = x^2$ v posunutí, které je určeno vektorem $(0; 2)$, tj. posunutím „ve směru osy y o dvě jednotky nahoru“. Podobně graf funkce f_2 získáme posunutím grafu funkce $y = x^3$ v posunutí, které je určeno vektorem $(0; -1)$, tj. posunutím „ve směru osy y o jednu jednotku dolů“.

Základem úvah o inverzní funkci je věta: K funkci f existuje inverzní funkce f^{-1} , a to jediná, právě když je funkce f prostá. Proto je třeba u funkcí, které prosté nejsou, zvolit pouze část jejich definičního oboru, na níž prosté jsou, a na této části pak definovat inverzní funkci.

Ve středoškolských učebnicích je pro $\sqrt[n]{a}$ uvedena podmínka nezápornosti odmocnence a pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Je žádoucí studenty nebalamutit a rozlišit $\sqrt[n]{a}$ pro n sudé, kde $a \geq 0$, a pro n liché, kde $a \in \mathbb{R}$.

Při hledání předpisu pro inverzní funkci k funkci $y = f(x)$ postupujeme obvykle tak, že z funkčního předpisu funkce f vyjádříme x a pak provedeme záměnu proměnných. Lze také naopak, napřed provést záměnu proměnných a pak vyjádřit y . Záměna proměnných představuje v soustavě souřadnic Oxy souměrnost grafů funkcí f a f^{-1} podle přímk $y = x$, tj. podle osy 1. a 3. kvadrantu.

Ke kreslení grafu funkcí lze využít software Geogebra (volně stažitelný).

Úloha 2 (úroveň 2)

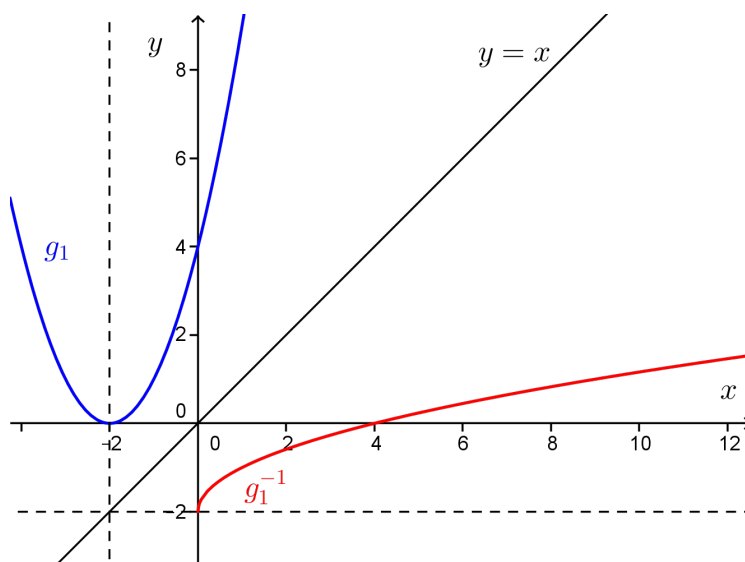
Předpokládané znalosti: základní pojmy – funkce, graf funkce, definiční obor a obor hodnot funkce, inverzní funkce, funkce $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$

Nakreslete graf funkce a) $g_1: y = (x + 2)^2$, b) $g_2: y = (x - 1)^3$. Určete její definiční obor a obor hodnot. Pokud k dané funkci existuje funkce inverzní, určete její předpis, nakreslete její graf v téže soustavě souřadnic, určete její definiční obor a obor hodnot.

Řešení

- a) Grafem funkce $g_1: y = (x + 2)^2$ je parabola s vrcholem $[-2; 0]$. Průsečík paraboly s osou y je bod $[0; 4]$. $D(g_1) = \mathbb{R}$, $H(g_1) = \langle 0; +\infty \rangle$.

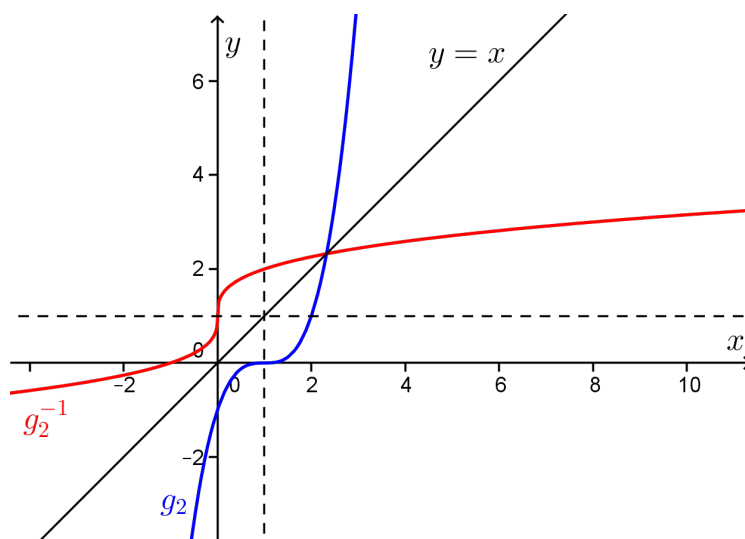
Pokud uvažujeme pouze část definičního oboru funkce g_1 , v níž je funkce prostá, tj. interval $\langle -2; +\infty \rangle$, lze definovat inverzní funkci $g_1^{-1}: y = \sqrt{x} - 2$. Graf funkce g_1^{-1} můžeme získat jako obraz grafu funkce g_1 v osové souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$. $D(g_1^{-1}) = \langle 0; +\infty \rangle$, $H(g_1^{-1}) = \langle 0; +\infty \rangle$.



Obr. 2a

- b) Grafem funkce $g_2: y = (x - 1)^3$ je kubická parabola procházející body $[1; 0]$, $[0; -1]$, $[2; 1]$. $D(g_2) = H(g_2) = \mathbb{R}$.

Funkce g_2 je prostá v celém svém definičním oboru, proto k ní existuje funkce inverzní $g_2^{-1}: y = \sqrt[3]{x} + 1$. Graf funkce g_2^{-1} můžeme získat jako obraz grafu funkce g_2 v osové souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$. $D(g_2^{-1}) = H(g_2^{-1}) = \mathbb{R}$.



Obr. 2b

Metodické poznámky

Obecné poznámky viz Metodické poznámky k 1. příkladu. Graf funkce g_2 získáme posunutím grafu funkce $y = x^2$ v posunutí, které je určeno vektorem $(-2; 0)$, tj. posunutím „ve směru osy x o dvě jednotky doleva“. Graf funkce g_2 získáme posunutím grafu funkce $y = x^3$ v posunutí, které je určeno vektorem $(1; 0)$, tj. posunutím „ve směru osy x o jednu jednotku doprava“.

Úloha 3 (úroveň 1)

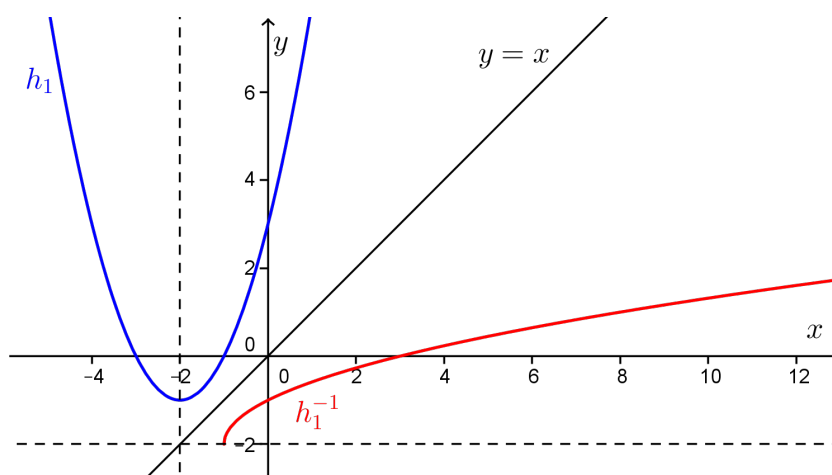
Předpokládané znalosti: základní pojmy – funkce, graf funkce, definiční obor a obor hodnot funkce, inverzní funkce, funkce $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$

Nakreslete graf funkce a) $h_1: y = (x + 2)^2 - 1$, b) $h_2: y = (x - 1)^3 + 2$. Určete její definiční obor a obor hodnot. Pokud k dané funkci existuje funkce inverzní, určete její předpis, nakreslete její graf v téže soustavě souřadnic, určete její definiční obor a obor hodnot.

Řešení

- a) Grafem funkce $h_1: y = (x + 2)^2 - 1$ je parabola s vrcholem $[-2; 1]$. Její průsečíky s osou x jsou body $[-3; 0]$, $[-1; 0]$, s osou y bod $[0; 3]$. $D(h_1) = \mathbb{R}$, $H(h_1) = \langle -1; +\infty \rangle$.

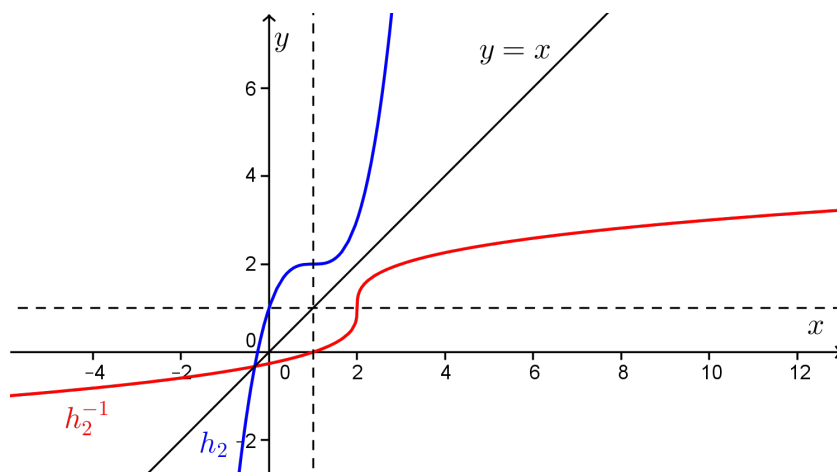
Pokud uvažujeme pouze část definičního oboru funkce h_1 , v níž je funkce prostá, tj. interval $\langle -2; +\infty \rangle$, lze definovat inverzní funkci $h_1^{-1}: y = \sqrt{x + 1} - 2$. Graf funkce h_1^{-1} můžeme získat jako obraz grafu funkce h_1 v osově souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$. $D(h_1^{-1}) = \langle -1; +\infty \rangle$, $H(h_1^{-1}) = \langle -2; +\infty \rangle$.



Obr. 3a

- b) Grafem funkce $h_2: y = (x - 1)^3 + 2$ je kubická parabola procházející body $[1; 2]$, $[0; 1]$, $[2; 3]$. $D(h_2) = H(h_2) = \mathbb{R}$.

Funkce h_2 je prostá v celém svém definičním oboru, proto k ní existuje funkce inverzní $h_2^{-1}: y = \sqrt[3]{x - 2} + 1$. Graf funkce h_2^{-1} můžeme získat jako obraz grafu funkce



Obr. 3b

h_2 v osové souměrnosti podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. podle přímky $y = x$. $D(h_2^{-1}) = H(h_2^{-1}) = \mathbb{R}$.

Metodické poznámky

Obecné poznámky: viz Metodické poznámky k 1. příkladu Graf funkce h_2 získáme posunutím grafu funkce $y = x^2$ v posunutí, které je určeno vektorem $(-2; -1)$, tj. posunutím „ve směru osy x o dvě jednotky doleva a jednu jednotku dolů“. Graf funkce h_2 získáme posunutím grafu funkce $y = x^3$ v posunutí, které je určeno vektorem $(1; 2)$, tj. posunutím „ve směru osy x o jednu jednotku doprava a dvě jednotky nahoru“.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Eva Pomykalová; eva.pomykalova@email.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: graf funkce, derivace funkce a její geometrický význam, výpočet velikosti úhlů

Úloha 1 (úroveň 1-2)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění funkce, přímka daná směrnici a bodem, derivace kvadratické funkce, geometrický význam derivace

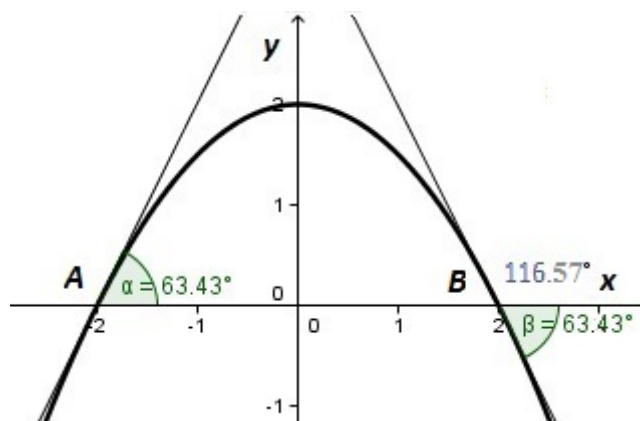
Zobrazte kvadratickou funkci $f: y = 2 - 0,5x^2$, vypočtěte, pod jakými úhly protíná její graf osu x , najděte rovnice tečen v těchto průsečících a graficky je znázorněte.

Řešení (s použitím Geogebry)

Sestrojíme graf a výpočtem najdeme souřadnice průsečíků grafu funkce s osou x ;

$$2 - 0,5x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4, x_{1,2} = \pm 2;$$

jsou to body $A[-2; 0]$ a $B[2; 0]$.



Derivace funkce f je $y' = -x$.

- a) Pro bod A platí $f'(-2) = 2$, je to směrnice tečny grafu v bodě A , takže $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\alpha \doteq 63,42495^\circ = 63^\circ 26' 6''$, kde α je směrový úhel tečny; rovnice tečny je $y - 0 = 2(x + 2)$, tedy $y = 2x + 4$.
- b) Pro bod B platí $f'(2) = -2$, je to směrnice tečny grafu v bodě B , takže $\operatorname{tg} \beta = -2$, $\beta \doteq 180^\circ - 63,42495^\circ = 116,57505^\circ = 116^\circ 33' 54''$, kde β je směrový úhel tečny; rovnice tečny je $y - 0 = -2(x - 2)$, tedy $y = -2x - 4$.

Metodické poznámky

V případě, který nastává v bodě b), lze za úhel dvou křivek vzít jejich ostrý úhel, v této úloze je to $63^\circ 26' 6''$.

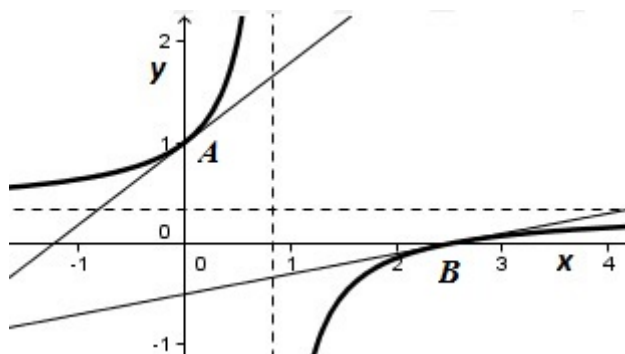
Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění funkce, derivace „zlomku“, geometrický význam derivace, přímka daná směrnici a bodem

Je dána funkce $f: y = \frac{2x-5}{6x-5}$. Graficky ji znázorněte, vypočtete pod jakým úhlem její graf protíná souřadnicové osy, zjistěte rovnice tečen v těchto průsečících a graficky je znázorněte.

Řešení (s použitím Geogebry)

Sestrojíme graf a zjistíme body, v nichž graf protíná souřadnicové osy.



Průsečík A s osou y je $f(0) = 1$; průsečík B s osou x je $0 = \frac{2x-5}{6x-5} \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$. Dostali jsme tak body $A[0; 1]$, $B[2,5; 0]$. Derivace funkce f je

$$y' = \frac{2(6x-5) - 6(2x-5)}{(6x-5)^2} = \frac{20}{(6x-5)^2}.$$

V bodě A je $f'(0) = \frac{20}{25} = 0,8$, rovnice tečny je $y - 1 = 0,8x$, tedy $y = 0,8x + 1$. Směrový úhel φ této tečny zjistíme ze vztahu $\operatorname{tg} \varphi = 0,8$; $\varphi \doteq 38,65981^\circ \doteq 38^\circ 39' 35''$; úhel α tečny v bodě A s osou y je $90^\circ - \varphi \doteq 51,34019^\circ \doteq 51^\circ 20' 25''$.

V bodě B je $f'(2,5) = \frac{20}{100} = 0,2$, rovnice tečny je $y = 0,2(x - 2,5)$. Směrový úhel β této tečny zjistíme ze vztahu $\operatorname{tg} \beta = 0,2$; úhel β tečny v bodě B s osou x je $\beta \doteq 11,30993^\circ \doteq 11^\circ 18'$.

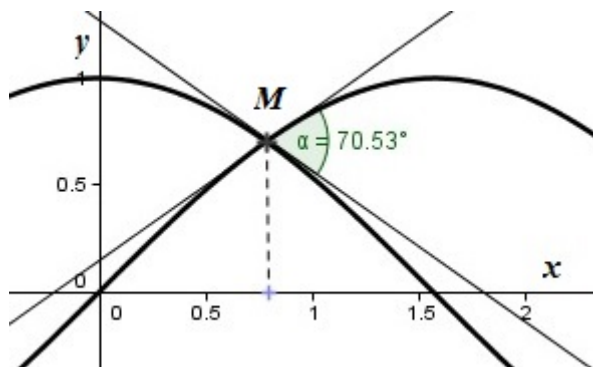
Metodické poznámky

Úhel dvou křivek v jejich průsečíku je definován jako odchylka jejich tečen v průsečíku.

Úloha 3 (úroveň 2-3)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění funkce, derivace goniometrických funkcí, geometrický význam derivace, přímka daná směrnici a bodem

Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ graficky znázorněte pro x v prvním kvadrantu, zjistěte úhel φ , pod nímž se křivky protínají, najděte rovnice tečen v jejich průsečíku a graficky je znázorněte.



Řešení (s použitím Geogebry)

Zobrazíme grafy obou zadaných funkcí.

Nyní vypočteme souřadnice průsečíku; v něm platí $\sin x = \cos x$. Dostali jsme goniometrickou rovnici, v níž je jisté $\cos x \neq 0$. Dělíme rovnici výrazem $\cos x$ a dostaneme goniometrickou rovnici $\tan x = 1$, která má v 1. kvadrantu jediné řešení $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Hodnoty obou zadaných funkcí v tomto bodě jsou $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, průsečíkem obou grafů je tak bod $M \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$.

Tečna ke grafu funkce sinus: Vypočteme derivaci $(\sin x)' = \cos x$; hodnota derivace v bodě $x_0 = \frac{\pi}{4}$, tedy směrnice tečny v bodě M je $k_1 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a rovnice tečny je $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Tečna ke grafu funkce kosinus: Vypočteme derivaci $(\cos x)' = -\sin x$; hodnota derivace v bodě $x_0 = \frac{\pi}{4}$, tedy směrnice tečny v bodě M je $k_2 = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ a rovnice tečny je $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Obě tečny můžeme nyní graficky znázornit. Pro odchylku dvou přímek platí vzorec

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad \text{pokud } k_1 k_2 \neq -1.$$

V našem případě je $k_1 k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$, takže

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right| = 2\sqrt{2}.$$

Pak $\varphi = 70,52878^\circ = 70^\circ 31' 44''$.

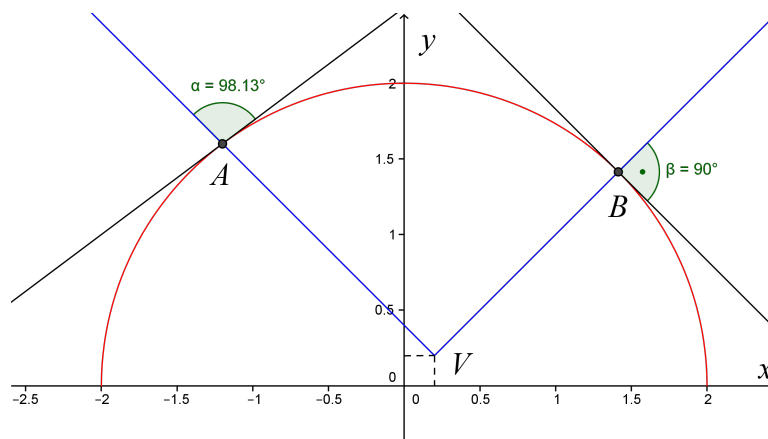
Metodické poznámky

Odchylku obou tečen lze vypočítat i bez uvedeného vzorce, např. užitím vektorů.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění funkce, derivace složené funkce, absolutní hodnota, geometrický význam derivace, přímka daná směrnicí a bodem

Jsou dány funkce $f: y = \sqrt{4 - x^2}$, $g: y = |x - 0,2| + 0,2$. Znázorněte je graficky, zjistěte úhly pod nimiž se křivky protínají, a najděte a graficky znázorněte tečny v jejich průsečících.



Řešení (s použitím Geogebry)

Zobrazíme grafy obou zadaných funkcí.

Vidíme, že grafem funkce f je horní polokružnice $x^2 + y^2 = 4$, grafem funkce g je lomená čára, ramena pravého úhlu s vrcholem $V[0, 2; 0, 2]$.

Najdeme průsečíky A, B obou křivek.

- a) Necht' nejprve $x < 0, 2$; pak funkce g má rovnici $y = -(x - 0, 2) + 0, 2 = 0, 4 - x$. Toto y dosadíme do rovnice kružnice a dostáváme $x^2 + (0, 4 - x)^2 = 4$. Řešíme kvadratickou rovnici

$$2x^2 - 0, 8x - 3, 84 = x^2 - 0, 4x - 1, 92 = 0;$$

dostaneme

$$D = 0, 16 + 7, 68 = 7, 84, \sqrt{D} = \sqrt{7, 84} = 2, 8,$$

odtud $x_1 = 1, 6$ a $x_2 = -1, 2$.

Dané podmínce vyhovuje jen záporný kořen $x_2 = -1, 2$; $y = 0, 4 - x_2 = 1, 6$; dostali jsme průsečík křivek $A[-1, 2; 1, 6]$. Rovnici tečny kružnice v bodě A sestavíme užitím vzorce $xx_0 + yy_0 = r^2$, $-1, 2x + 1, 6y = 4$, takže rovnice tečny je $y = 0, 75x + 2, 5$. Směrnice tečny je $k_1 = 0, 75$, směrnice levé polopřímky grafu funkce g je $k_2 = -1$; úhel α obou křivek vypočítáme ze vzorce

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad \text{neboť} \quad k_1 k_2 = -0, 75.$$

Máme

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{0, 75 + 1}{1 - 0, 75} \right| = 7, \quad \text{takže} \quad \alpha = 81, 86990^\circ = 81^\circ 52' 12''.$$

- b) Necht' nyní $x \geq 0, 2$; pak funkce g má rovnici $y = x$. Dosadíme do rovnice kružnice a máme $x^2 + x^2 = 4, \Rightarrow x_{1, 2} = \pm \sqrt{2}$; dané podmínce vyhovuje jen kladný kořen $x_1 = \sqrt{2}, y = x = \sqrt{2}$, dostali jsme průsečík křivek $B[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Rovnici tečny kružnice v bodě B sestavíme užitím vzorce: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 4$, takže rovnice tečny je $y = -x + 2\sqrt{2}$. Směrnice tečny je $k_1 = -1$, směrnice pravé polopřímky grafu funkce g je $k_2 = 1$, takže $k_1 k_2 = -1$, úhel křivek v průsečíku B je $\beta = 90^\circ$.

Metodické poznámky

Vidíme, že využití Geogebry je ve všech těchto úlohách podstatným přínosem a umožňuje bezprostřední kontrolu prováděných výpočtů.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: exponenciální funkce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: znalost grafu funkce $f: y = 2^x$

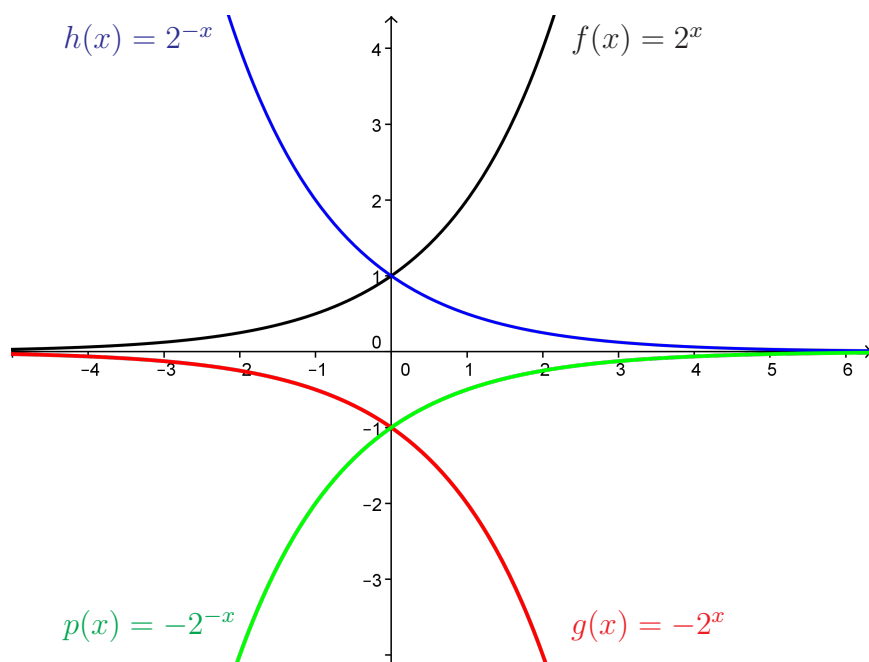
Na základě znalosti grafu funkce $f: y = 2^x$ sestrojte graf funkce $g: y = -2^x$, $h: y = 2^{-x}$, $p: y = -2^{-x}$.

Řešení

Abychom získali určitou představu, sestavíme si pro začátek tabulku s několika funkčními hodnotami:

x	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
-2^x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8
2^{-x}	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
-2^{-x}	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$

Z vlastností exponenciální funkce je patrné, že funkční hodnoty funkce $g: y = -2^x$ jsou čísla opačná k funkčním hodnotám funkce $f: y = 2^x$, funkční hodnoty funkce $h: y = 2^{-x}$ jsou čísla převrácená k funkčním hodnotám funkce $f: y = 2^x$. Obojí využijeme při sestavování grafu. Graf funkce $g: y = -2^x$ získáme v osové souměrnosti s osou x , graf funkce $h: y = 2^{-x}$ získáme v osové souměrnosti s osou y . Na základě této zkušenosti vyvodíme, že graf funkce $p: y = -2^{-x}$ získáme zobrazením grafu funkce $h: y = 2^{-x}$ v osové souměrnosti s osou x .



Obr. 1: Úloha 1

Úloha 2 (úroveň 1–2)

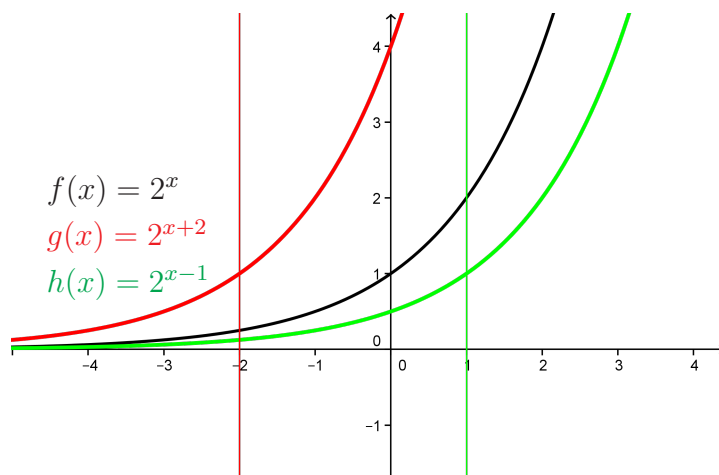
Předpokládané znalosti: znalost grafu funkce $f: y = 2^x$

Na základě znalosti grafu funkce $f: y = 2^x$ sestrojte graf funkce $g: y = 2^{x+2}$, $h: y = 2^{x-1}$. Proveďte závěr pro graf funkce $d: y = 2^{x+a}$.

Řešení

Pro funkci $g: y = 2^{x+2}$ je exponent roven nule pro $x = -2$, graf funkce $f: y = 2^x$ se tedy posune o dvě jednotky doleva. To znamená, že osa y se posune do čísla -2 na ose x . Pro funkci $h: y = 2^{x-1}$ je exponent roven nule pro $x = 1$, takže osa y se posune do čísla 1 na ose x .

Závěr. Pro funkci $d: y = 2^{x+a}$ je exponent roven nule pro $x = -a$, takže osa y se posune do čísla $-a$ na ose x . V této nové soustavě souřadnic $O'xy'$ sestrojíme graf funkce $y' = 2^x$.



Obr. 2: Úloha 2

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: znalost grafu funkce $f: y = a^x$

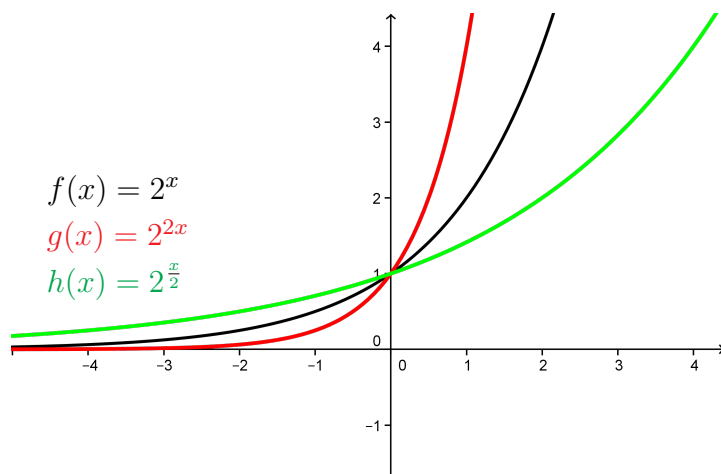
Sestrojte graf funkce $g: y = 2^{2x}$, $h: y = 2^{\frac{x}{2}}$. Proveďte závěr pro graf funkce $d: y = 2^{ax}$.

Řešení

Výraz 2^{2x} můžeme napsat jako $(2^2)^x = 4^x$. Sestrojíme tedy graf funkce $g: y = 4^x$.

Výraz $2^{\frac{x}{2}}$ lze napsat jako $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = (\sqrt{2})^x$. Sestrojíme tedy graf funkce $h: y = (\sqrt{2})^x$.

Závěr. Každý výraz tvaru 2^{ax} lze napsat jako $(2^a)^x$, proto můžeme sestrojit i graf funkce $d: y = (2^a)^x$.



Obr. 3: Úloha 3

Úloha 4 (úroveň 3)

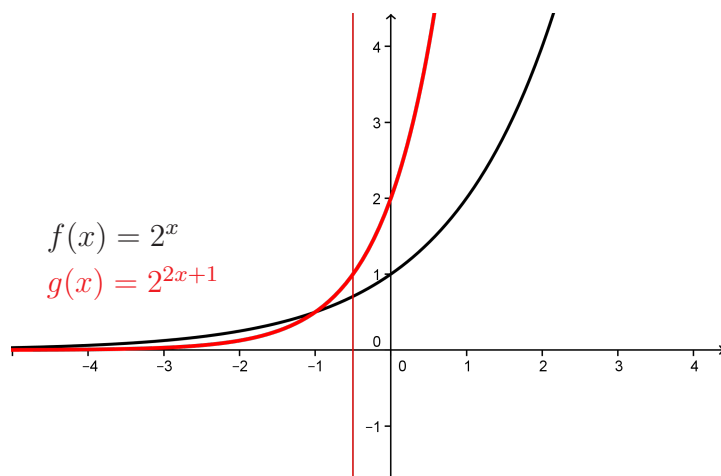
Předpokládané znalosti: znalost grafu funkce $f: y = a^x$

Sestrojte graf funkce $g: y = 2^{2x+1}$. Proveďte závěr pro graf funkce $i: y = 2^{ax+b}$.

Řešení

Funkční předpis funkce g upravíme $y = 2^{2x+1} = 2^{2(x+\frac{1}{2})}$. Na základě znalostí z úloh 2 a 3 vidíme, že osa y se posune do čísla $-\frac{1}{2}$ na ose x . V této nové soustavě souřadnic $O'xy'$ sestrojíme graf funkce $g': y = 4^x$.

Stejným způsobem upravíme i graf funkce $d: y = 2^{ax+b} = 2^{a(x+\frac{b}{a})}$. Osa y se posune do čísla $-\frac{b}{a}$ na ose x . V této nové soustavě souřadnic $O'xy'$ sestrojíme graf funkce $d': y = (2^a)^x$.



Obr. 4: Úloha 4

Metodické poznámky

Znalost průběhu exponenciální funkce patří k základním kompetencím, které by studenti střední školy měli zvládnout. První úlohu je třeba propojit s osovou souměrností. Jedná se o obecnou závislost mezi funkcemi $f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$. Druhá úloha patří opět k základním úlohám a je třeba ji zasadit do vztahu mezi funkcemi $f(x)$ a $f(x+a)$. Třetí a čtvrtá úloha spojuje průběh exponenciální funkce a pravidla pro počítání s mocninami. Docházíme k docela zajímavým závěrům, které by měli žáci vyvodit sami.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: exponenciální funkce

Úloha 1 (úroveň 1)

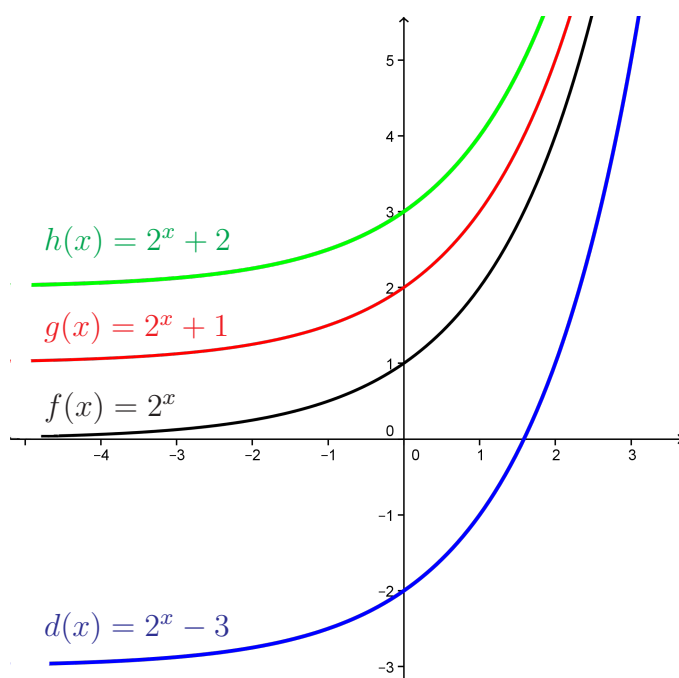
Předpokládané znalosti: znalost grafu funkce $f: y = 2^x$

Na základě znalosti grafu funkce $f: y = 2^x$ sestrojte graf funkce $g: y = 2^x + 1$. Proveďte závěr pro graf funkce $d: y = 2^x + a$.

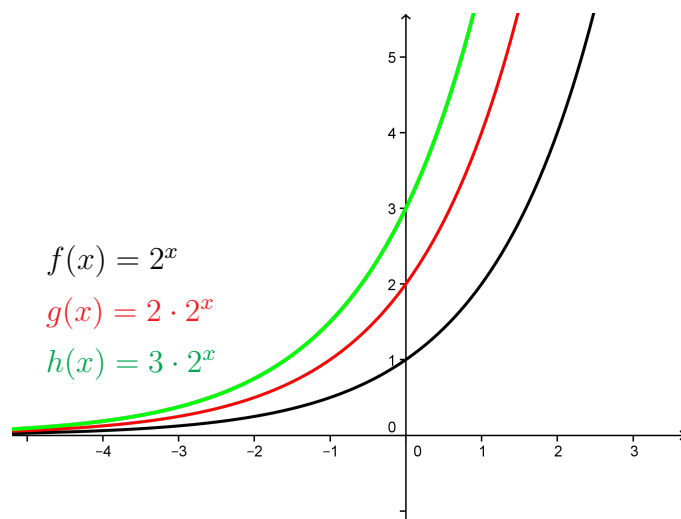
Řešení

Ze zadání je patrné, že každou funkční hodnotu funkce f musíme zvětšit o 1. Celý graf funkce f se tedy posune o 1 jednotku ve směru kladné poloosy y . Můžeme také říci, že osa x se posune do čísla 1 na ose y a v soustavě $O'x'y$ sestrojíme graf funkce $y = 2^{x'}$.

Závěr. Každou funkční hodnotu funkce d získáme tak, že funkční hodnotu funkce f zvětšíme o a . Graf funkce f se tedy posune o hodnotu a ve směru osy y .



Obr. 1: Úloha 1



Obr. 2: Úloha 2

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: znalost grafu funkce $f: y = 2^x$, $h: y = 2^{x+a}$

Sestrojte graf funkce $g: y = 2 \cdot 2^x$. Proveďte závěr pro graf funkce $d: y = a \cdot 2^x$.

Řešení

Předpis funkce f můžeme upravit, $2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$, a sestrojíme graf funkce $y = 2^{x+1}$. Přitom se každá funkční hodnota funkce f se zvětší dvakrát.

Závěr. Předpis funkce d můžeme upravit, $a \cdot 2^x = 2^{x+\log_2 a}$ ($a = 2^{\log_2 a}$), a sestrojíme graf funkce $d: y = 2^{x+\log_2 a}$. Každá taková funkce protíná osu y v bodě $[0; a]$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: znalost grafu funkce $f: y = 2^{x+1}$

Sestrojte graf funkce $g: y = 2^{|x+1|}$.

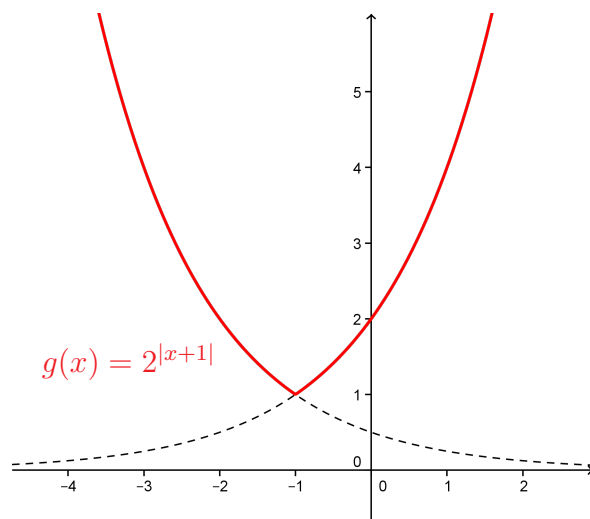
Řešení

Tento typ úlohy je třeba řešit pomocí nulových bodů. Výraz $x + 1$ nabývá hodnoty 0 pro $x = -1$. V intervalu $(-\infty; -1)$ nabývá záporných hodnot a $|x + 1| = -x - 1$. V tomto intervalu budeme sestavovat graf funkce $y = 2^{-x-1} = \frac{1}{2^{x+1}}$. V intervalu $(-1; \infty)$ nabývá výraz $x + 1$ hodnot kladných a $|x + 1| = x + 1$. V tomto intervalu budeme sestavovat graf funkce $y = 2^{x+1}$. Výsledný graf bude sjednocením grafů dvou funkcí ve dvou různých intervalech.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: znalost grafu funkce $f: y = a^x + b$

V množině reálných čísel řešte nerovnici $\frac{1}{2^{x-2}} > 4$.

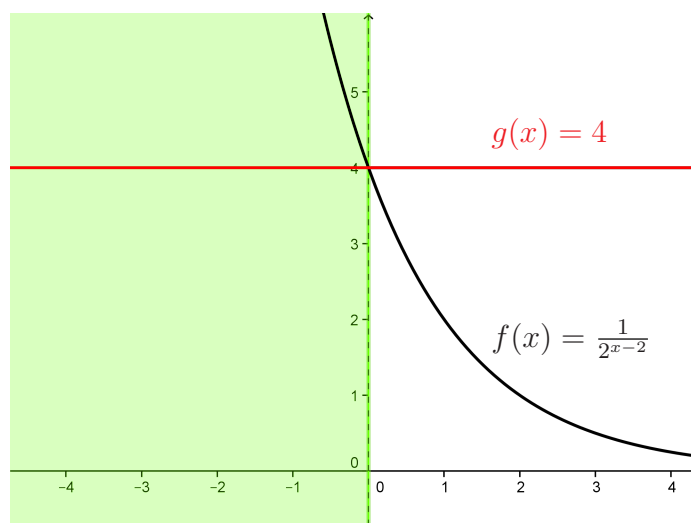


Obr. 3: Úloha 3

Řešení

Nerovnost $\frac{1}{2^{x-2}} > 4$ je ekvivalentní s nerovností $2^{x-2} < 2^{-2}$. Protože funkce $y = 2^x$ je rostoucí, platí $x - 2 < -2$, tedy $x < 0$. Všechny použité úpravy byly ekvivalentní, proto zkouška není nutná. Množina kořenů $K = (-\infty; 0)$.

Výpočet podpoříme grafickým řešením. Do jedné kartézské soustavy souřadnic sestrojíme graf funkce $f: y = \frac{1}{2^{x-2}}$ a $g: y = 4$. Řešením jsou ta x , pro která je graf funkce f „nad“ grafem funkce g .



Obr. 4: Úloha 4

Metodické poznámky

Úloha číslo jedna je zařazena z důvodu opakování a připomenutí si grafu exponenciální funkce a posunutí ve směru osy y . Druhá úloha je podstatně zajímavější a žáci by měli odhalit, že parametr nemění tvar grafu funkce, ale způsobuje příslušný posuv. Zbylé úlohy jsou komplexnějšího charakteru a slouží k propojení více základních poznatků.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: funkce, graf funkce, vlastnosti funkce, inverzní funkce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: exponenciální a logaritmická funkce, posunutí, inverzní funkce

Určete definiční obor a sestrojte grafy funkcí:

- a) $f: y = 3^{x-2} - 1$,
- b) $g: y = \log_3(x - 2) - 1$.

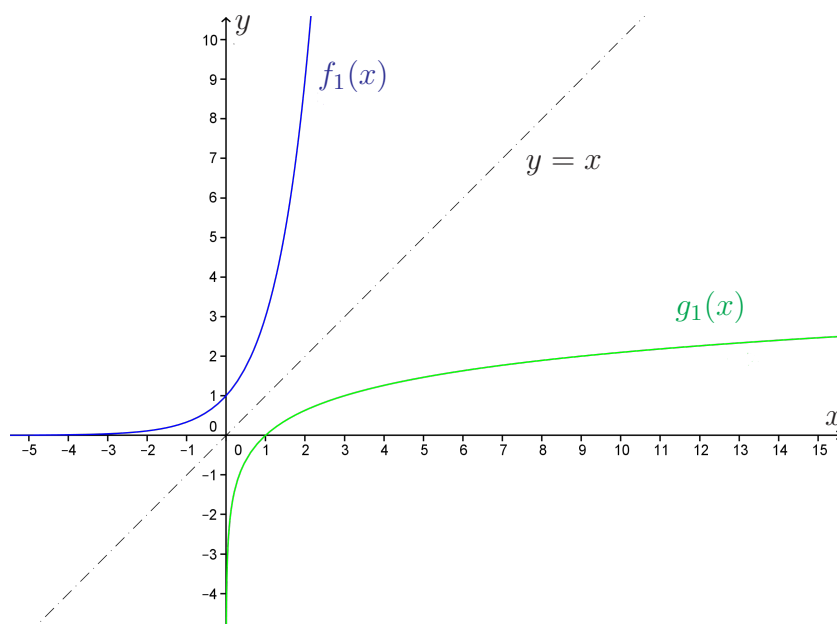
Rozhodněte, zda jsou oba grafy navzájem souměrné v nějaké souměrnosti; pokud ano, určete ji.

Řešení

Sestrojíme nejprve grafy exponenciální a logaritmické funkce o základu 3:

- a) $f_1: y = 3^x$,
- b) $g_1: y = \log_3(x)$.

Víme, že se jedná o navzájem inverzní funkce. Grafy jsou tedy souměrné podle osy $y = x$ (viz obr. 1).

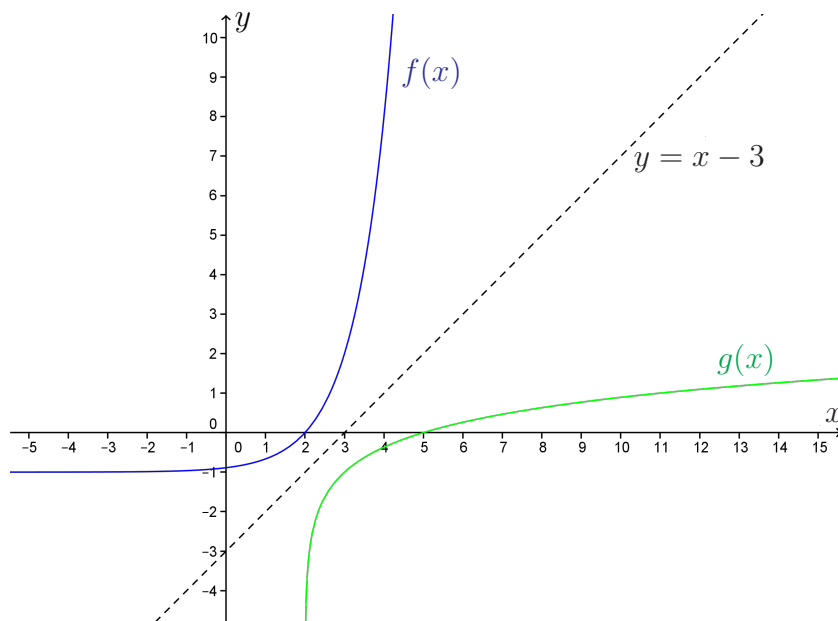


Obr. 1: Grafy inverzních funkcí

Graf funkce $y = f(x) + k$ je graf funkce $y = f(x)$ posunutý o k jednotek v kladném směru osy y , tedy graf funkce $y = f(x)$ posunutý o vektor $(0; k)$.

Graf funkce $y = f(x + m)$ je graf funkce $y = f(x)$ posunutý o m jednotek *proti* kladnému směru osy x , tedy graf funkce $y = f(x)$ posunutý o vektor $(-m; 0)$.

Proto výsledné grafy získáme posunutím grafů funkcí $f_1(x), g_1(x)$ o vektor $(2; -1)$. Grafy budou navzájem souměrné podle přímky $y = x$ posunuté o též vektor, tedy podle přímky $y = (x - 2) - 1$, tedy $y = x - 3$ (viz obr. 2).



Obr. 2: Grafy daných funkcí

Definiční obor exponenciální funkce $f(x)$ je $\mathbb{R}$, definiční obor logaritmické funkce $g(x)$ je interval $(0; +\infty)$ posunutý o $+2$ ve směru osy x , tedy otevřený interval $(2; +\infty)$.

Metodické poznámky

Úloha procvičuje grafy exponenciální a logaritmické funkce a posunutí grafu. Nevyžaduje (na rozdíl od Úlohy 2 dále) žádné úpravy výrazů.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: exponenciální a logaritmická funkce, posunutí, inverzní funkce, pravidla pro úpravy logaritmů a počítání s mocninami

Určete definiční obor a sestrojte grafy funkcí:

- $f: 9(y - 2) = 3^{x-1}$,
- $g: y = \log_3(9x - 27)$.

Rozhodněte, zda jsou oba grafy navzájem souměrné v nějaké souměrnosti; pokud ano, určete ji.

Řešení

Předpisy funkcí nejprve upravíme pomocí pravidel pro úpravy výrazů s logaritmy a mocninami:

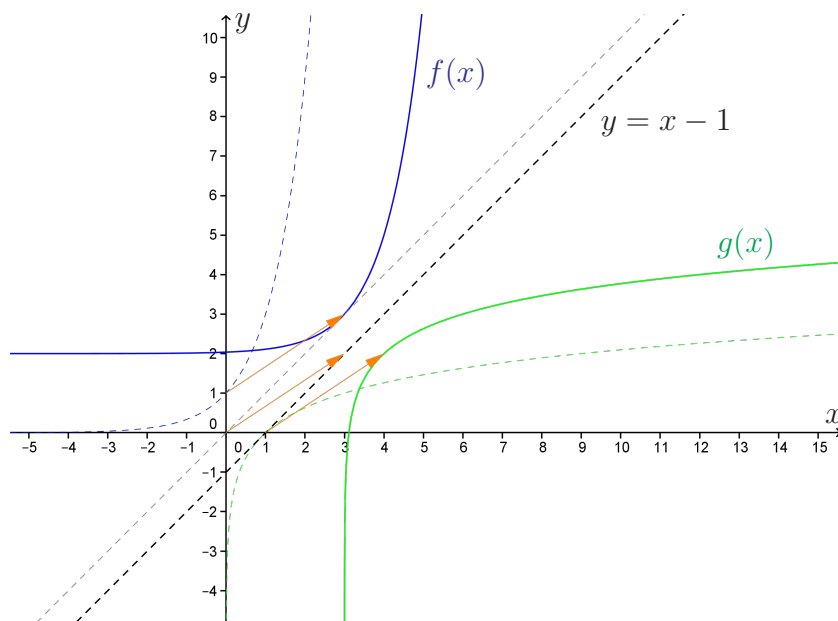
$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f: \begin{aligned} 9(y-2) &= 3^{x-1}, \\ 3^2(y-2) &= 3^{x-1}, \\ (y-2) &= 3^{x-3}, \\ y &= 3^{x-3} + 2. \end{aligned} & \text{b)} & g: \begin{aligned} y &= \log_3(9x-27), \\ y &= \log_3(9(x-3)), \\ y &= \log_3 9 + \log_3(x-3), \\ y &= \log_3(x-3) + 2. \end{aligned} \end{array}$$

Podobně jako v úloze 1 sestrojíme nejprve grafy exponenciální a logaritmické funkce o základu 3

$$\text{a)} \quad f_1: y = 3^x,$$

$$\text{b)} \quad g_1: y = \log_3(x),$$

a ty pak posuneme o vektor $(3; 2)$.



Obr. 3: Grafy souměrných ale nikoliv inverzních funkcí

Protože základní funkce $f_1(x)$, $g_1(x)$ jsou navzájem inverzní, jsou jejich grafy souměrně sdružené podle osy $y = x$. Tedy grafy funkcí $f(x)$, $g(x)$ jsou souměrně sdružené podle osy $y = x$ posunuté o týž vektor $(3; 2)$, tj. podle přímky $y = x - 1$ (viz obr. 3).

Definiční obor exponenciální funkce $f(x)$ je $\mathbb{R}$, definiční obor logaritmické funkce $g(x)$ je otevřený interval $(3; +\infty)$.

Metodické poznámky

Úloha procvičuje grafy exponenciální a logaritmické funkce, úpravy výrazů s logaritmy a mocninami a posunutí grafu funkce.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: exponenciální a logaritmická funkce, posunutí, pravidla pro úpravy logaritmu a exponenciální funkce, sudá funkce, absolutní hodnota

Určete definiční obor a sestrojte grafy funkcí:

- a) $f: y = 3^{-|x-3|+2}$,
b) $g: y = \log_3 ||x| - 2|$.

Řešení

- a) Vyjdeme opět ze známého grafu exponenciální funkce. Můžeme se rozhodnout, že (kvůli zápornému znaménku v exponentu, není to nutné) základní funkcí bude funkce

$$f_1: y = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Upravíme předpis funkce

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-3|-2}$$

a sestrojíme nejprve graf funkce

$$f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-3|},$$

tedy graf sudé funkce

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} \text{ posunutý o vektor } (0; 3).$$

Graf „roztáhneme“ ve směru osy y 9krát, protože

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-3|-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-3|} \cdot 3^2.$$

Řešení ukazuje obrázek 4.

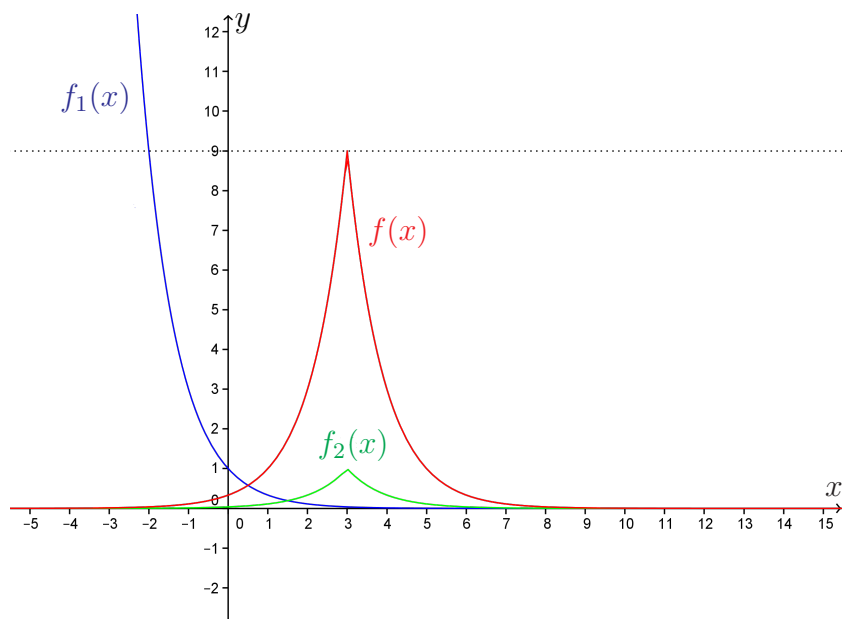
Druhá možnost je rozdělit předpis podle nulové hodnoty výrazu pod absolutní hodnotou a sestrojit dvě větve:

- pro všechna x z intervalu $(3; +\infty)$ graf funkce $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$,
- a pro všechna x z intervalu $(-\infty; 3)$ graf funkce $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+1} = 3^{x-1}$.

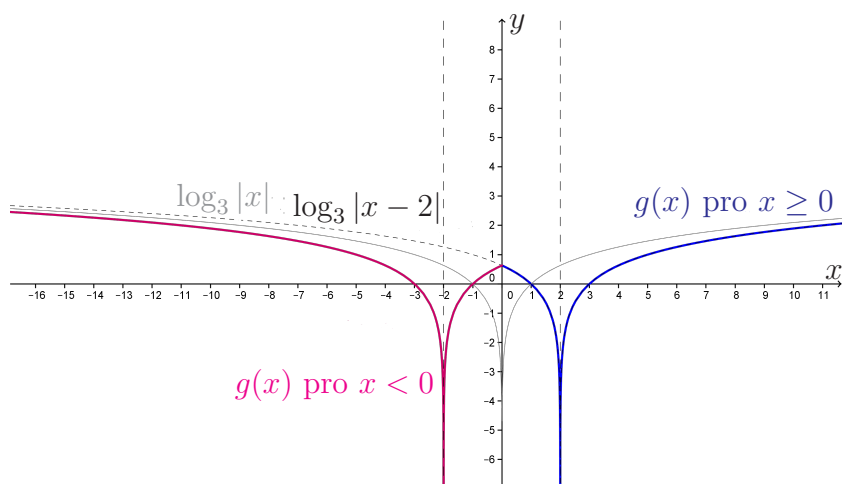
- b) Vyjdeme opět ze známého grafu logaritmické funkce. Vidíme, že funkce g je sudá. Můžeme tedy sestrojit její graf pouze pro nezáporná x a poté k výslednému grafu funkce g_1 sestrojit graf osově souměrný podle osy y .

$$g_1: y = \log_3 |x - 2|, \quad x \geq 0.$$

V argumentu funkce g_1 však stále zůstává jedna absolutní hodnota. Můžeme ale sestrojit graf funkce $y = \log_3 |x|$ a ten posunout o vektor $(2; 0)$. Tuto úpravu provedeme



Obr. 4



Obr. 5

pro všechna reálná x , na požadovaný interval $\langle 0; +\infty \rangle$ omezíme až výsledný, posunutý graf. Řešení ukazuje obrázek 5.

Definiční obor exponenciální funkce $f(x)$ je $\mathbb{R}$, definiční obor logaritmické funkce $g(x)$ je množina $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Metodické poznámky

Úloha vyžaduje kromě úprav výrazů také pečlivý rozbor problému, je vhodná pro žáky, kteří chtějí řešit složitější problémové úlohy.

Zdroj: archiv autora, autor

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.; sarka@gbn.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: exponenciální rovnice, kvadratické rovnice, goniometrické rovnice, substituce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, pravidla pro počítání s mocninami, kvadratické rovnice

V oboru reálných čísel řešte rovnici $\frac{1}{9} \cdot 3^{2x^2-10x+14} = 30 \cdot 3^{x^2-5x+5} - 9$.

Řešení

Danou rovnici zapíšeme ve tvaru

$$3^{-2} \cdot 3^{2x^2-10x+14} = 10 \cdot 3 \cdot 3^{x^2-5x+5} - 9.$$

Užitím věty o násobení mocnin se stejným základem dostaneme

$$3^{2x^2-10x+12} = 10 \cdot 3^{x^2-5x+6} - 9,$$

tj.

$$\left(3^{x^2-5x+6}\right)^2 - 10 \cdot 3^{x^2-5x+6} + 9 = 0.$$

Zavedením substituce $3^{x^2-5x+6} = t$ obdržíme kvadratickou rovnici $t^2 - 10t + 9 = 0$ s kořeny $t_1 = 9$, $t_2 = 1$. Pro neznámou x tedy platí rovnice

$$3^{x^2-5x+6} = 9 \quad \text{nebo} \quad 3^{x^2-5x+6} = 1,$$

tj.

$$3^{x^2-5x+6} = 3^2 \quad \text{nebo} \quad 3^{x^2-5x+6} = 3^0.$$

Odtud dospějeme ke kvadratickým rovnicím

$$x^2 - 5x + 6 = 2 \quad \text{nebo} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

s kořeny $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$.

Závěr. Množina všech řešení dané rovnice je $\{1, 2, 3, 4\}$.

Metodické poznámky

Při řešení příkladu je vhodné studentům připomenout vlastnosti exponenciální funkce tzn., že pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ je funkce $f(x) = a^x$ prostá a ryze monotonní na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Z tohoto tvrzení pak bezprostředně plyne, že rovnice $a^{g(x)} = a^{h(x)}$ je ekvivalentní s rovnicí $g(x) = h(x)$, kde $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ a $g(x)$, $h(x)$ jsou reálné funkce.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, pravidla pro počítání s mocninami s racionálním exponentem, kvadratické rovnice

V oboru reálných čísel řešte rovnici $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

Řešení

Výraz $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ na levé straně rovnice vhodně rozšíříme a rovnici postupně upravíme

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x &= 4, \\ \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x &= 4, \\ \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} &= 4.\end{aligned}$$

Zavedením substituce $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = z$ dostaneme $z + \frac{1}{z} = 4$. Tedy $z^2 - 4z + 1 = 0$.

Řešením této kvadratické rovnice získáme dva kořeny $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Dostáváme tedy dvě rovnice

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x &= 2 - \sqrt{3}, \\ \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x &= 2 + \sqrt{3},\end{aligned}$$

kteří jdou další úpravou zjednodušit. Z první rovnice postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x &= 2 - \sqrt{3}, \\ \left(2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} &= 2 - \sqrt{3}, \\ \frac{x}{2} &= 1, \\ x &= 2.\end{aligned}$$

Druhou rovnici postupně upravujeme

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x &= 2 + \sqrt{3}, \\ \left(2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} &= \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}}, \\ \left(2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} &= \frac{1}{2 - \sqrt{3}}, \\ \left(2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} &= \left(2 - \sqrt{3}\right)^{-1}, \\ \frac{x}{2} &= -1, \\ x &= -2.\end{aligned}$$

Závěr. Množina všech řešení dané rovnice je $\{-2, 2\}$.

Metodické poznámky

Úlohu je možno řešit také analogicky rozšířením výrazu $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ na levé straně rovnice výrazem $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, pravidla pro počítání s mocninami, kvadratické rovnice, goniometrické rovnice

V oboru reálných čísel řešte rovnici $81^{\sin^2 x} = 30 - 9 \cdot 3^{2 \cos 2x}$, pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešení

Danou rovnici postupně upravíme

$$\begin{aligned} 3^{4 \sin^2 x} &= 30 - 3^{2+2 \cos 2x}, \\ 3^{4 \sin^2 x} &= 30 - 3^{2(1+\cos 2x)}, \\ 3^{4 \sin^2 x} + 3^{2(1+\cos 2x)} - 30 &= 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\begin{aligned} 2(1 + \cos 2x) &= 2(1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = 2(1 + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = \\ &= 2(2 - 2 \sin^2 x) = 4 - 4 \sin^2 x, \end{aligned}$$

dostaneme

$$3^{4 \sin^2 x} + 3^{4-4 \sin^2 x} - 30 = 0,$$

tj.

$$3^{4 \sin^2 x} + \frac{3^4}{3^{4 \sin^2 x}} - 30 = 0.$$

Zavedeme substituci

$$3^{4 \sin^2 x} = z$$

a po úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$z^2 - 30z + 81 = 0$$

s kořeny

$$z_1 = 27, \quad z_2 = 3.$$

Pro původní neznámou x máme tedy dvě exponenciální rovnice

$$3^{4 \sin^2 x} = 27, \tag{1}$$

$$3^{4 \sin^2 x} = 3. \tag{2}$$

Z rovnice (1) postupně dostáváme

$$\begin{aligned}3^{4 \sin^2 x} &= 27, \\3^{4 \sin^2 x} &= 3^3, \\4 \sin^2 x &= 3, \\\sin^2 x &= \frac{3}{4}, \\|\sin x| &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Odtud $x \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$.

Z rovnice (2) postupně obdržíme

$$\begin{aligned}3^{4 \sin^2 x} &= 3, \\3^{4 \sin^2 x} &= 3^1, \\4 \sin^2 x &= 1, \\\sin^2 x &= \frac{1}{4}, \\|\sin x| &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Odtud $x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$.

Závěr. Množina všech řešení dané rovnice je $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6} \right\}$.

Metodické poznámky

Při řešení exponenciální rovnice využívají studenti navíc vztahů mezi goniometrickými funkcemi a řeší jednoduché goniometrické rovnice na daném intervalu.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Sedláček Lubomír, Ph.D.; lsedlacekf@fai.utb.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: definiční obor funkce, druhá odmocnina, nerovnice, funkce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: logaritmus, vlastnosti goniometrických funkcí, řešení goniometrických nerovnic

Určete definiční obor funkce $y = \ln(1 - 2 \cos x)$.

Řešení

Argument přirozeného logaritmu musí být kladná hodnota, platí tedy $1 - 2 \cos x > 0$. Po úpravě řešíme nerovnici $\cos x < \frac{1}{2}$. Funkce je v intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ klesající, z toho vyplývá $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x$. Zároveň platí $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ a tedy $x < (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$. Sloučením obou nerovností dostáváme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde k je celé číslo

Závěr. Definiční obor funkce $y = \ln(1 - 2 \cos x)$ je sjednocení intervalů

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right).$$

Metodické poznámky

Na příkladu si žáci zopakují znalosti o logaritmických i goniometrických funkcích a řešení nerovnic.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: druhá odmocnina, vlastnosti goniometrických funkcí, řešení goniometrických nerovnic

Určete definiční obory funkcí $y = \sqrt{\sin x \cos x}$ a $y = \sqrt{\sin x} \sqrt{\cos x}$. Výsledky porovnejte.

Řešení

1. $y = \sqrt{\sin x \cos x}$. Odmocněnec je nezáporné číslo a zároveň platí $\sin x \cos x \leq 1$. Dostáváme vztah

$$0 \leq \sin x \cdot \cos x \leq 1. \quad (1)$$

Nerovnost (1) platí, když $\sin x$ i $\cos x$ jsou a) kladné hodnoty, nebo hodnota jednoho se rovná 0. Toto odpovídá nerovnici $0 + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, b) záporné hodnoty, nebo hodnota jednoho je rovna 0, tomu odpovídá sjednocení intervalů $\langle \pi + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, kde k je celé číslo.

2. $y = \sqrt{\sin x} \sqrt{\cos x}$. Oba odmocněnci musí být nezáporná čísla $\sin x \geq 0$ $\cos x \geq 0$, mohou tedy nabývat hodnot $0 \leq \sin x \leq 1$, $0 \leq \cos x \leq 1$.

Závěr. Definiční funkce $y = \sqrt{\sin x} \sqrt{\cos x}$ je sjednocení intervalů

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle,$$

zatímco definiční obor první funkce je sjednocení intervalů

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle.$$

Metodické poznámky

Geometrická interpretace: žákům je vhodné doporučit, aby si do jednoho obrázku nakreslili sinusoidu i kosinusoidu a definiční obor si vyšrafovali a porovnali výsledky v obou případech.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: druhá odmocnina, goniometrické nerovnice

Určete definiční obor funkce

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}.$$

Řešení

Odmocněnec je nezáporné číslo a zároveň se jmenovatel nesmí rovnat 0. Řešíme tedy nerovnici $\sin 2x > 0$. Pro přehlednější řešení zavedeme substituci $2x = z$. Dostaneme $\sin z > 0$, tedy

$$z \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi; \pi + 2k\pi).$$

Vrátíme se k substituci a vyřešíme jednoduchou soustavu dvou nerovnic

$$2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi.$$

Závěr. Po úpravě dostáváme sjednocení intervalů

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right).$$

Metodické poznámky

Žáci mohou použít substituci a řeší jednoduchou soustavu nerovnic. Úlohu lze upravit na těžší variantu, například argument $2x$ nahradit argumentem $\cos x$.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: dekadický logaritmus, logaritmické rovnice

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: definice a vlastnosti logaritmu, definiční obor, lineární rovnice

Řešte rovnici $\log(x + 2) + \log 2 = 1 + \log(1 - x)$.

Řešení

Logaritmická funkce je definována pro kladný argument, takže musí platit $(x + 2 > 0) \wedge (1 - x > 0)$, tj. $(x > -2) \wedge (x < 1)$. Rovnice je tak definována na intervalu $(-2; 1)$. Na levé straně rovnice použijeme vlastnost, že součet logaritmů je roven logaritmu součinu, na pravé straně navíc ještě vlastnost, že $1 = \log 10$. Tak dostáváme $\log(2x + 4) = \log(10 - 10x)$. Z rovnosti logaritmů plyne rovnost argumentů, tj. $2x + 4 = 10 - 10x$, z toho $12x = 6$, $x = \frac{1}{2}$.

Závěr. Platí $\frac{1}{2} \in (-2; 1)$. Ježto všechny úpravy byly ekvivalentní, je množinou všech řešení množina $M = \{\frac{1}{2}\}$.

Metodické poznámky

Je možno doporučit, aby si žáci provedli i zkoušku způsobem $L =$, $P =$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: definice a vlastnosti logaritmu, definiční obor, nulová hodnota logaritmické funkce, kvadratická rovnice

Řešte rovnici

$$\frac{\log(8 - x)}{\log(x - 2)} = 2.$$

Řešení

Nejprve stanovíme definiční obor; máme tu jednak logaritmy a jednak zlomek. Argumenty logaritmů musejí být kladné, takže $(8 - x > 0) \wedge (x - 2 > 0)$ tj. $(x < 8) \wedge (x > 2)$, což dává interval $(2; 8)$. Dále musí být $\log(x - 2) \neq 0$, tedy $x - 2 \neq 1$, $x \neq 3$. Definičním oborem dané rovnice je množina $(2; 3) \cup (3; 8)$. Na této množině můžeme rovnici násobit jmenovatelem zlomku na levé straně rovnice, $\log(8 - x) = 2 \log(x - 2)$; nyní využijeme pravidlo o logaritmu mocniny $\log(8 - x) = \log(x - 2)^2$. Z rovnosti logaritmů plyne rovnost jejich argumentů. $8 - x = (x - 2)^2$. Provedeme umocnění a kvadratickou rovnici upravíme na standardní tvar $x^2 - 3x - 4 = 0$. Řešíme

$$D = 9 + 16 = 25, \quad \sqrt{D} = 5, \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ -1 \end{array} \right.$$

Ježto $4 \in (2; 3) \cup (3; 8)$, je číslo 4 řešením dané logaritmické rovnice, ale $-1 \notin (2; 3) \cup (3; 8)$, číslo -1 řešením není.

Závěr. Ježto všechny úpravy byly ekvivalentní, je množinou všech řešení množina $M = \{4\}$.

Metodické poznámky

Případná zkouška je zde velmi jednoduchá

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: definice a vlastnosti logaritmu, definiční obor, nulová hodnota logaritmické funkce, kvadratická rovnice s iracionálními kořeny

Stanovte definiční obor funkce

$$y = \frac{1}{\log \frac{2x-1}{x+2}}$$

a řešte rovnici

$$\frac{1}{\log \frac{2x-1}{x+2}} = 2.$$

Řešení

První krok – argument logaritmu musí být kladný, tedy $\frac{2x-1}{x+2} > 0$. Jsou dvě možnosti $(2x-1 > 0) \wedge (x+2 > 0) \Rightarrow (x > \frac{1}{2}) \wedge (x > -2) \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ nebo $(2x-1 < 0) \wedge (x+2 < 0) \Rightarrow (x < \frac{1}{2}) \wedge (x < -2) \Rightarrow x < -2$, což společně dává množinu $(-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$; (tím je vyloučena i 0 ve jmenovateli argumentu logaritmu; druhý krok – ve jmenovateli zlomku nesmí být 0, takže

$$\frac{2x-1}{x+2} \neq 1.$$

Platí tedy $2x-1 \neq x+2 \Rightarrow x \neq 3$. Definičním oborem dané funkce je množina $(-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 3) \cup (3; +\infty)$. Na této množině řešíme rovnici

$$\frac{1}{\log \frac{2x-1}{x+2}} = 2.$$

Vynásobíme ji výrazem ve jmenovateli (je $\neq 0$) a dostaneme

$$1 = 2 \log \frac{2x-1}{x+2}.$$

Rovnici upravíme na rovnost dvou logaritmů

$$\log 10 = \log \left(\frac{2x-1}{x+2} \right)^2$$

a z toho

$$10 = \frac{(2x-1)^2}{(x+2)^2} \Rightarrow 10(x^2+4x+4) = 4x^2-4x+1;$$

upravíme na kvadratickou rovnici ve standardním tvaru $6x^2 + 44x + 39 = 0$. Řešíme ji

$$D = 44^2 - 4 \cdot 6 \cdot 39 = 1000, \quad \sqrt{D} = 10\sqrt{10} \doteq 31,6, \\ x_{1,2} = \frac{-44 \pm 10\sqrt{10}}{12} = \frac{-22 \pm 5\sqrt{10}}{6};$$

$x_1 \doteq -1,03$, $x_2 \doteq -6,3$. Platí

$$\frac{-22 + 5\sqrt{10}}{6} \doteq -1,03 \notin (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 3) \cup (3; +\infty), \\ \frac{-22 - 5\sqrt{10}}{6} \doteq -6,3 \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; 3) \cup (3; +\infty).$$

Závěr. Ježto všechny úpravy byly ekvivalentní, je množinou všech řešení zadané logaritmické rovnice množina $M = \left\{ \frac{-22 - 5\sqrt{10}}{6} \right\}$.

Poznámka. $\log \frac{-12,6-1}{-6,3+2} = \log \frac{-13,6}{-4,3} = \log \frac{13,6}{4,3} = 0,50007 \dots$

Metodické poznámky

Řešení úlohy je náročné na pozornost řešitele. Řešení ve formálně přesném tvaru nenapovídá skutečnou hodnotu kořenů, proto je vhodné použít i přibližné hodnoty (při zjišťování, jestli kořeny kvadratické rovnice patří do definičního oboru funkce). Doporučuje se i ověření výsledku, jak je uvedeno v závěrečné poznámce.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: logaritmické rovnice, kvadratické rovnice

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: logaritmické rovnice, pravidla pro počítání s logaritmy, kvadratické rovnice

V oboru reálných čísel řešte rovnici $\log(x-1) + \log x = 2 - \log 5$.

Řešení

Podmínky řešitelnosti: $x > 0$. Užitím vět pro počítání s logaritmy vyjádříme danou rovnici ve tvaru

$$\log[(x-1)x] = \log \frac{100}{5}.$$

Po odlogaritmování obou stran a dalšími úpravami postupně dostáváme

$$\begin{aligned}(x-1)x &= \frac{100}{5}, \\ x^2 - x &= 20, \\ x^2 - x - 20 &= 0.\end{aligned}$$

Tato kvadratická rovnice má kořeny $x_1 = 5$, $x_2 = -4$, z nichž však pouze první vyhovuje podmínce $x > 0$, druhý tedy není kořenem dané rovnice.

Závěr. Rovnice má jediné řešení $x = 5$.

Metodické poznámky

Při řešení úlohy je vhodné studentům připomenout věty pro počítání s logaritmy a vlastnosti logaritmické funkce tzn., že pro $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ je funkce $f(x) = \log_a x$ prostá a ryze monotonní na intervalu $(0, +\infty)$ a tedy rovnice $\log_a x = \log_a y$ je ekvivalentní s rovnicí $x = y$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: logaritmické rovnice, pravidla pro počítání s logaritmy, kvadratické rovnice, užití substituce

V oboru reálných čísel řešte rovnici $\log_3 x^{\log_3 x} + \log_3 \frac{9}{x^3} = 0$.

Řešení

Podmínky řešitelnosti: $x > 0$. Užitím vět pro počítání s logaritmy danou rovnici postupně upravíme

$$\begin{aligned}\log_3 x \cdot \log_3 x + \log_3 \frac{9}{x^3} &= 0, \\ \log_3^2 x + \log_3 9 - \log_3 x^3 &= 0, \\ \log_3^2 x + 2 \log_3 3 - 3 \log_3 x &= 0, \\ \log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2 &= 0.\end{aligned}$$

Zavedením substituce $\log_3 x = z$ dostaneme $z^2 - 3z + 2 = 0$. Řešením této kvadratické rovnice získáme dva kořeny $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Odtud

- a) $\log_3 x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 3$,
- b) $\log_3 x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 9$.

Oba kořeny jsou kladné, tedy vyhovují dané rovnici.

Závěr. Všechna řešení dané rovnice jsou $x \in \{3, 9\}$.

Metodické poznámky

Úloha je vhodnou ukázkou užití substituce při řešení logaritmických rovnic druhého stupně.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: logaritmické rovnice, pravidla pro počítání s logaritmy, kvadratické rovnice, užití substituce

V oboru reálných čísel řešte rovnici $\log_7 x + \log_x 7 = \log_7^2 x + \log_x^2 7 - \frac{7}{4}$.

Řešení

Podmínky řešitelnosti: $(x > 0) \wedge (x \neq 1)$. Položíme-li

$$\log_7 x + \log_x 7 = z, \tag{1}$$

pak dostaneme

$$\log_7^2 x + 2 \log_7 x \log_x 7 + \log_x^2 7 = z^2.$$

Použijeme následující větu.

Nechť a, b jsou reálná čísla, $0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1$. Pak platí

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}. \tag{2}$$

Podle této věty tedy platí, že

$$\log_x 7 = \frac{1}{\log_7 x}.$$

Aplikujeme-li (2) na danou rovnici dostaneme

$$\log_7^2 x + 2 \log_7 x \cdot \frac{1}{\log_7 x} + \log_x^2 7 = z^2,$$

odtud

$$\log_7^2 x + \log_x^2 7 = z^2 - 2.$$

Původní rovnice pak získá tvar

$$z = z^2 - 2 - \frac{7}{4},$$

tedy

$$4z^2 - 4z - 15 = 0.$$

$$\text{Odtud } z_1 = -\frac{3}{2}, z_2 = \frac{5}{2}.$$

Dosazením $z_1 = -\frac{3}{2}$ do rovnice (1) dostáváme

$$\log_7 x + \log_x 7 = -\frac{3}{2},$$

$$\log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = -\frac{3}{2},$$

$$2 \log_7^2 x + 3 \log_7 x + 2 = 0.$$

Nechť $t = \log_7 x$, pak $2t^2 + 3t + 2 = 0$. Je zřejmé, že diskriminant této kvadratické rovnice je záporný, tudíž rovnice nemá řešení v oblasti přípustných hodnot.

Dosazením $z_2 = \frac{5}{2}$ do rovnice (1) obdržíme

$$\log_7 x + \log_x 7 = \frac{5}{2},$$

$$\log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = \frac{5}{2},$$

$$2 \log_7^2 x - 5 \log_7 x + 2 = 0.$$

Nechť $t = \log_7 x$, pak $2t^2 - 5t + 2 = 0$. Řešením této kvadratické rovnice dostáváme dva kořeny $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 2$.

Odtud:

$$\text{a) } \log_7 x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{7},$$

$$\text{b) } \log_7 x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 49.$$

Oba kořeny vyhovují podmínkám řešitelnosti, tedy i dané rovnici.

Závěr. Všechna řešení dané rovnice jsou $x \in \{\sqrt{7}, 49\}$.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je možno doplnit jednoduchým důkazem věty (2).

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Sedláček Lubomír, Ph.D.; lsedlacekf@fai.utb.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: goniometrické funkce, sinus, kosinus, tangens, součtové vzorce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: sinus, kosinus, tangens, součtové vzorce

Bez použití tabulek a kalkulačtorů stanovte přesnou hodnotu výrazů:

- a) $\sin 75^\circ$,
- b) $\cos 75^\circ$,
- c) $\operatorname{tg} 75^\circ$.

Řešení

- a) K výpočtu využijeme součtový vzorec pro funkci sinus

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

který platí pro každé α a β . Protože 75° lze vyjádřit jako $45^\circ + 30^\circ$, máme

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

- b) K výpočtu využijeme součtový vzorec pro funkci kosinus

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

který platí pro každé α a β . Protože 75° lze vyjádřit jako $45^\circ + 30^\circ$, máme

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

- c) Platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

proto

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3},$$

když jsme použili výsledky získané v bodu a) a b).

Závěr. Pomocí výpočtu jsme zjistili, že platí:

a) $\sin 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$,

b) $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$,

c) $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

Metodické poznámky

Hodnotu $\cos 75^\circ$ lze vypočítat pomocí základního vztahu $\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = 1$ nebo z pomocného pravoúhlého trojúhelníku, kde např. odvěsna protilehlá úhlu velikosti 75° má délku $\sqrt{6} + \sqrt{2}$, přepona délku 4 a zbývající odvěsnu dopočítáme pomocí Pythagorovy věty. Takto nám v obou případech vyjde

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}}{4}.$$

Kdybychom chtěli výraz $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$ vyjádřit pomocí druhé mocniny vhodného dvojčlenu, pak bychom mohli např. předpokládat, že $8 - 4\sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^2$, kterážto rovnost platí pro $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. (Totiž $8 - 4\sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + 2\sqrt{3}ab$, odtud $a^2 + 3b^2 = 8$ a $ab = -2$, dále $a = -\frac{2}{b}$ a $\frac{4}{b^2} + 3b^2 = 8$, odkud $b^2 = 2$.)

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: sinus, kosinus, tangens, součtové vzorce

Řešte rovnici (ve stupňové míře)

$$\frac{\sin(x + 60^\circ) - \cos(x + 60^\circ)}{\sin(x + 60^\circ) + \cos(x + 60^\circ)} = \sqrt{3}.$$

Řešení

Lze postupovat např. takto: levou stranu rovnice upravíme s využitím součtových vzorců

$$\frac{\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ - \cos x \cos 60^\circ + \sin x \sin 60^\circ}{\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ + \cos x \cos 60^\circ - \sin x \sin 60^\circ} = \sqrt{3},$$

dosadíme za známé hodnoty

$$\frac{\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x}{\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x} = \sqrt{3},$$

rozšíříme zlomek na levé straně 2 a vynásobíme obě strany rovnice jeho jmenovatelem

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x - \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3} \sin x + 3 \cos x + \sqrt{3} \cos x - 3 \sin x$$

a po úpravě dostaneme

$$\sin x = \cos x.$$

Ze získaného výsledku $\operatorname{tg} x = 1$ je zřejmé, že $x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$.

Při úpravách jsme násobili obě strany rovnice jmenovatelem zlomku na levé straně, proto musíme ověřit, zda není pro $x = 45^\circ$ roven nule. Dosadíme za x vypočtenou hodnotu 45° a přepočteme argument do I. kvadrantu:

$$\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \sin 75^\circ - \cos 75^\circ.$$

Zřejmě $\sin 75^\circ - \cos 75^\circ > 0$, neboť $\sin 75^\circ > \cos 75^\circ$. (S využitím výsledků z úlohy 1: $\sin 75^\circ - \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.) Proto je $x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$ řešením dané rovnice.

Závěr. Řešením dané rovnice je množina

$$K = \{45^\circ + k \cdot 180^\circ, \text{ kde } k \text{ je celé číslo}\}.$$

Metodické poznámky

Danou rovnici lze řešit pohodlněji s využitím vzorců pro součet sinů:

$$\frac{\sin(x + 60^\circ) - \cos(x + 60^\circ)}{\sin(x + 60^\circ) + \cos(x + 60^\circ)} = \sqrt{3},$$

nahradíme kosiny ($\cos x = \sin(90^\circ - x)$)

$$\frac{\sin(x + 60^\circ) - \sin(30^\circ - x)}{\sin(x + 60^\circ) + \sin(30^\circ - x)} = \sqrt{3},$$

uplatníme vzorce pro součet

$$\frac{2 \sin(x + 15^\circ) \cos 45^\circ}{2 \cos(x + 15^\circ) \sin 45^\circ} = \sqrt{3}$$

a dostaneme

$$\operatorname{tg}(x + 15^\circ) = \sqrt{3}.$$

Odsud opět $x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: sinus, kosinus, součtové vzorce

Řešte rovnici

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}.$$

Pohodlný postup je následující: Nahradíme činitele vystupující u goniometrických funkcí takto: $\sqrt{3} = a \sin \alpha$, $1 = a \cos \alpha$. Dostaneme rovnici

$$a \sin \alpha \cos x + a \cos \alpha \sin x = \sqrt{2}$$

jejíž levou stranu upravíme s využitím součtového vzorce:

$$a \sin(x + \alpha) = \sqrt{2}.$$

Vypočteme nyní parametry a a α :

a) Platí $a^2 \sin^2 \alpha = 3$, $a^2 \cos^2 \alpha = 1$, takže

$$a^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha = a^2 = 4.$$

Odtud vezmeme např. $a = 2$.

b) Dále

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha} = \sqrt{3},$$

tj. $\alpha = 60^\circ$.

Danou rovnici tedy můžeme psát

$$\sin(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pro jejím řešení platí:

- (i) V prvním kvadrantu $x + 60^\circ = 45^\circ$, a tedy $x = -15^\circ$,
- (ii) V druhém kvadrantu $x + 60^\circ = 135^\circ$, a tedy $x = 75^\circ$.

Závěr. Množinou řešení dané rovnice je

$$K = \{-15^\circ + k \cdot 360^\circ, 75^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ kde } k \text{ je celé číslo}\}.$$

Metodické poznámky

Danou rovnici lze řešit i nahrazením kosinu sinem pomocí základního vzorce, osamocněním odmocniny a umocněním obou stran rovnice:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cos x + \sqrt{1 - \sin^2 x} &= \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \\ 3 \cos^2 x - 2\sqrt{6} \cos x + 2 &= 1 - \sin^2 x \\ 4 \cos^2 x - 2\sqrt{6} \cos x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Odsud dostaneme

$$\cos x_{1,2} = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4},$$

což, s využitím výsledků úlohy 1 a toho, že $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, dá $x_{11} = -15^\circ$, $x_{12} = 15^\circ$, $x_{21} = -75^\circ$, $x_{22} = 75^\circ$. Zkouška, která vyloučí x_{12} a x_{21} , je při tomto postupu (s umocněním) nutnou součástí řešení.

Zdroj: dílo autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: součtové vzorce pro goniometrické funkce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus

Pomocí součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus odvoďte rovnost

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad x+y \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Řešení

Odvození je uvedeno níže.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \\ &= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \frac{\sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}. \end{aligned}$$

Závěr. Výše uvedená rovnost platí.

Metodické poznámky

Úloha je úlohou na procvičení součtových vzorců a úprav výrazů.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: tangens dvojnásobného úhlu, výpočet kořenů kvadratické rovnice

Na základě znalosti tabulkové hodnoty $\operatorname{tg} 30^\circ$ vypočtete hodnotu $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Řešení

Lze si povšimnout, že $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 15^\circ)$. Budeme tedy potřebovat vzorec pro výpočet hodnoty funkce tangens dvojnásobného úhlu. Lze jej odvodit z první úlohy.

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}.$$

Tedy

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(2 \cdot 15^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}.$$

Po upravení a substituci $y = \operatorname{tg} 15^\circ$ dostáváme rovnici $y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0$, jejímiž kořeny jsou $y_{1,2} = -\sqrt{3} \pm 2$. Funkce tangens má v prvním kvadrantu kladnou hodnotu, proto záporný kořen můžeme vyloučit. Zbývá tak výsledek $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

Závěr. Tato hodnota je $2 - \sqrt{3}$.

Metodické poznámky

Úloha spojuje několik dovedností, kromě odvozování za součtových vzorců je to užití řešení kvadratické rovnice a také vlastností goniometrických funkcí. Je zřejmé, že je nutné tuto úlohu považovat za náročnější.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: součtové vzorce pro goniometrické funkce, řešení algebraických rovnic vyšších řádů

Vypočítejte hodnotu $\operatorname{tg} 36^\circ$ bez užití kalkulačky či jiných elektronických přístrojů.

Řešení

Nejprve si uvědomme, že platí $0 = \operatorname{tg} 180^\circ = \operatorname{tg}(5 \cdot 36^\circ)$. Navíc platí rovnosti $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg}(4x+x) = \operatorname{tg}(2 \cdot 2x+x)$. Užitím součtového vzorce a vzorce pro tangens dvojnásobného úhlu dostaneme níže uvedené rovnosti.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(4x+x) &= \frac{\operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 4x} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x}} = \frac{2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right)^2} = \\ &= \frac{2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \frac{2 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{1 - \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right)^2}} = \\ &= \frac{\frac{4 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right)^2}{1 - \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right)^2 - \operatorname{tg} x \cdot \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \\ &= \frac{4 \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2 - 4 \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2 - 4 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg}^2 x)}. \end{aligned}$$

Tento výpočet použijeme pro $x = 36^\circ$ a pro zkrácení zápisu zavedeme do rovnice substituci $y = \operatorname{tg} 36^\circ$ a ještě si uvědomíme, že zlomek se rovná nule, pokud je jeho čitatel nulový. Obdržíme tak následující algebraickou rovnici 5. stupně

$$4y(1 - y^2) + y(1 - y^2)^2 - 4y \cdot y^2 = y(5 - 10y^2 + y^4) = 0,$$

která má pět reálných kořenů $y_1 = 0$, $y_2 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, $y_3 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, $y_4 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$, $y_5 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$. Naši úloze však vyhovuje pouze kořen $y_2 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$

(kořen $y_1 = 0$ a záporné kořeny lze vyloučit, protože funkce tangens je v prvním kvadrantu kladná, k vyloučení kořenu y_4 si stačí uvědomit, že pro úhly menší než 45° je hodnota funkce tangens menší než číslo 1).

Závěr. Platí $\operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

Metodické poznámky

Úloha je myšlenkově i početně náročná, proto ji uvádíme v nejvyšší úrovni obtížnosti. Kromě propojení goniometrických vzorců, vlastností goniometrických funkcí a řešení rovnice čtvrtého řádu pomocí substituce musí student prokázat velkou míru koncentrace a dobrou kulturu zápisu matematických výpočtů. Úloha je vhodná pro nadané studenty k domácímu řešení. Zbývající kořeny y_0 , y_2 , y_3 , y_4 jsou po řadě hodnoty $\operatorname{tg} 0^\circ$, $\operatorname{tg}(4 \cdot 36^\circ)$, $\operatorname{tg}(2 \cdot 36^\circ)$, $\operatorname{tg}(3 \cdot 36^\circ)$.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: goniometrické funkce

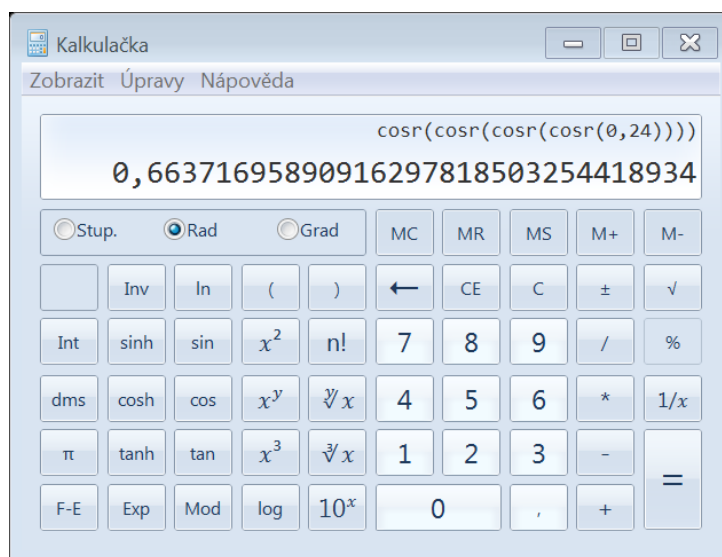
Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: práce s kalkulačkou, grafy funkcí, funkce kosinus, řešení rovnic

Na kalkulačce nastavte režim pro výpočet hodnot goniometrických funkcí v radiánech. Zvolte libovolné $x_0 \in (0; 1)$, pomocí kalkulačky určete hodnoty funkcí

$$f_1: y = \cos x_0, \quad f_2: y = \cos(\cos x_0), \quad f_3: y = \cos(\cos(\cos x_0)), \dots$$

Takto pokračujte ve výpočtu f_n do chvíle, kdy se výsledek na kalkulačce již nezmění. Postup opakujte ještě dvakrát a porovnejte všechny tři výsledky.



- Na základě předešlých výpočtů určete řešení rovnice $x = \cos x$ s přesností na 3 desetinná místa.
- Zakreslete do jednoho obrázku grafy funkce $f: y = \cos x$, $g: y = x$ a ověřte výsledek.

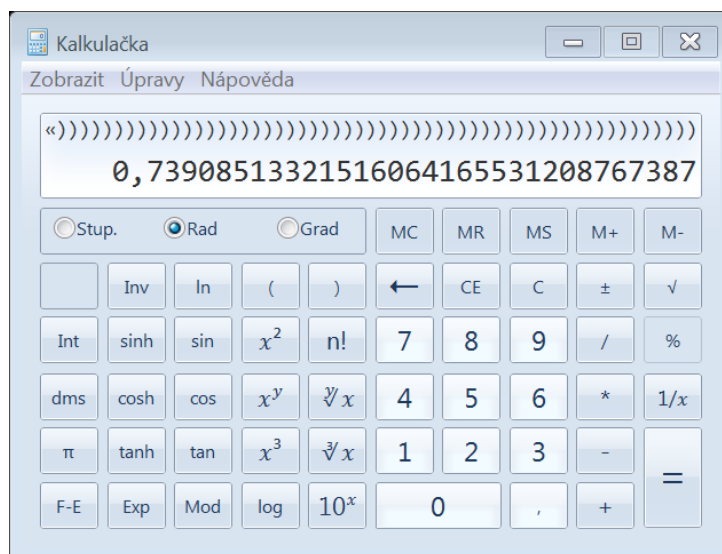
K řešení použijte např. <http://funkce.argh.cz>¹⁾

Řešení

Po konečném počtu kroků se na kalkulačce dostaneme k výsledku $0,739\dots$, který se dále (vzhledem ke konečnému počtu míst na kalkulačce) nemění. Počet kroků, po kterém

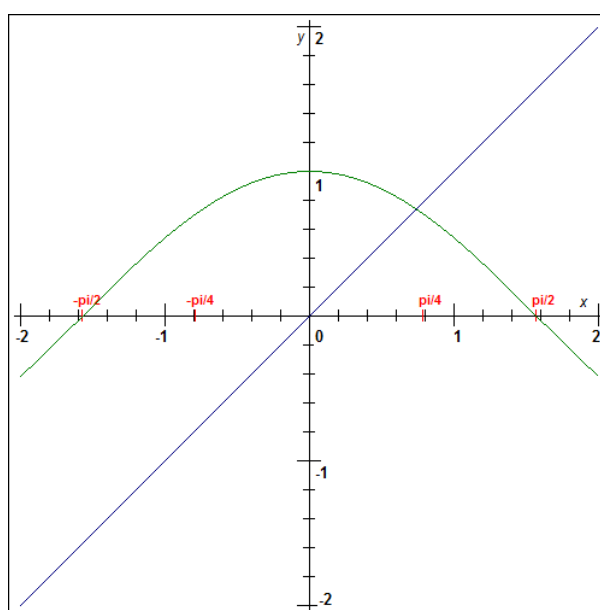
¹⁾ <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/daniel.mica/index.html>

získáme tuto hodnotu, závisí na volbě x_0 , která je náhodná. Zjevně jsme získali hodnotu x_n , pro kterou platí $x_n = \cos x_{n-1} = \cos x_n$.



Do jednoho grafu zakreslíme funkce $f: y = \cos x$ a $g: y = x$. Najdeme jejich průsečík, jehož x -ová souřadnice je řešením hledané rovnice.

$$0,739 \doteq \cos 0,739$$



Závěr. Řešením rovnice $x = \cos x$ (s přesností na 3 desetinná místa) je $x = 0,739$.

Metodické poznámky

Je možno zadat jako soutěž – kdo nejrychleji najde řešení. Úlohu obtížnosti 1 jsou schopni vyřešit pomocí kalkulačky i nejslabší studenti, měla by je však motivovat k úvahám o dalších souvislostech – graf funkce, řešení rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: goniometrické funkce, goniometrické rovnice, vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Nechť pro reálná čísla $\alpha, \beta \in \langle 0; \pi \rangle$ platí

$$(\sin \alpha + \cos \alpha = 1) \wedge (\sin \beta + \cos \beta = 0).$$

Rozhodněte, které z čísel α, β je větší. Své řešení zdůvodněte. Výsledek znázorněte na grafu funkce $f: y = \sin x + \cos x$.

Řešení

Z rovnic vypočítáme vyhovující argumenty $\alpha, \beta \in \langle 0; \pi \rangle$ a porovnáme je. Nejprve řešíme první rovnici

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 1.$$

K úpravě levé strany využijeme toho, že pro každé reálné číslo α platí

$$\cos \alpha = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right),$$

dále použijeme známý vzorec

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

a postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) &= 2 \sin \frac{\alpha + \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)}{2} \cos \frac{\alpha - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)}{2} = 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 2 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme rovnici

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2k\pi \quad \vee \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Řešení druhé rovnice

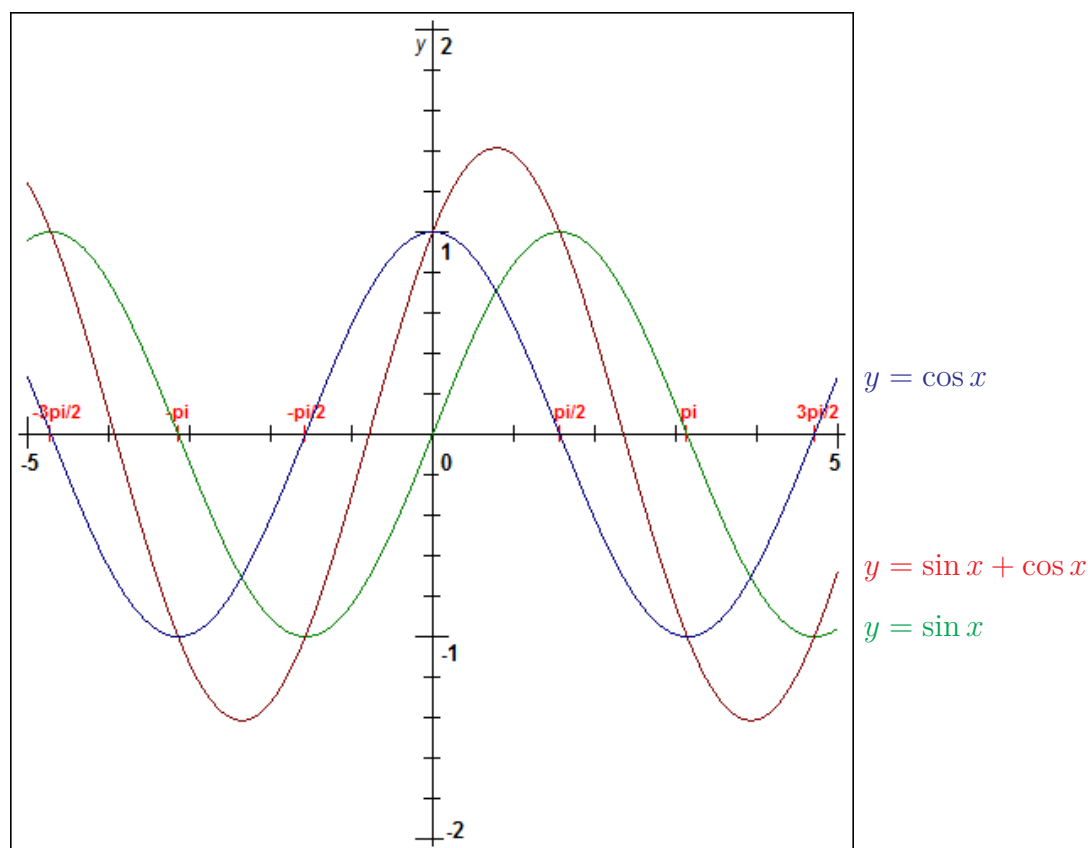
$$\sin \beta + \cos \beta = 0.$$

Ze zadání plyne, že $\cos \beta \neq 0$, můžeme tedy rovnici vydělit $\cos \beta$ a upravit do tvaru

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta = -1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad \text{kde} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Závěr. První rovnice pro $\alpha \in \langle 0; \pi \rangle$ má dvě řešení, buď $\alpha = 0$, nebo $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Druhá rovnice pro $\beta \in \langle 0; \pi \rangle$ má jediné řešení $\beta = \frac{3\pi}{4}$. Protože $\alpha \leq \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} = \beta$, pro $\alpha, \beta \in \langle 0; \pi \rangle$

platí $\alpha < \beta$. Z čísel α, β , která vyhovují zadání úlohy, je větší číslo β . Řešení vidíme i na grafu.



Metodické poznámky

V úloze jsou využita řešení dvou typových goniometrických rovnic. V závěru je třeba se vrátit k jednotlivým řešením a porovnat je. Lze využít i jiný postup úpravy rovnice (např. obdoba úlohy 3c).

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: goniometrické funkce, goniometrické rovnice, úpravy výrazů

Nechť pro libovolné reálné číslo x a pro reálné číslo $t \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$ platí rovnost $t = \sin x + \cos x$.

- Vyjádřete $\sin^4 x + \cos^4 x$ jako funkci proměnné t .
- S využitím výpočtu z části úlohy a) vypočítejte hodnotu výrazu $\sin^4 x + \cos^4 x$ pro

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

- Vyřešte rovnici $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ a ověřte výpočet části úlohy b) dosazením kořenů této rovnice do výrazu

$$\sin^4 x + \cos^4 x.$$

Řešení

a) Výraz $\sin^4 x + \cos^4 x$ upravíme na tvar

$$\begin{aligned} & (\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \\ & = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{(2 \sin x \cdot \cos x)^2}{2} = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za $t = \sin x + \cos x$, bude

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + \sin 2x,$$

tedy

$$\sin 2x = t^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{(t^2 - 1)^2}{2} = \frac{1 - t^4 + 2t^2}{2}.$$

b) Dosadíme do výrazu $\frac{1}{2}(1 - t^4 + 2t^2)$ hodnotu $t = \sqrt{2}$ a vypočítáme

$$\frac{1 - (\sqrt{2})^4 + 2 \cdot (\sqrt{2})^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

c) Nejprve vypočítáme kořeny rovnice $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. Obě strany rovnice vynásobíme číslem $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ a využijeme znalost součtového vzorce

$$\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \sin(x + y),$$

takže postupně dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 1, \\ & \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1, \\ & \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1, \quad \Rightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Odtud $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Dosadíme-li výše vypočítané hodnoty do výrazu $\sin^4 x + \cos^4 x$, dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \sin^4 \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4, \\ \cos^4 x &= \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4, \\ \sin^4 x + \cos^4 x &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Závěr.

- a) Pro libovolné reálné číslo x a pro reálné číslo $t \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$ a zároveň $t = \sin x + \cos x$ platí

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{(t^2 - 1)^2}{2} = \frac{1 - t^4 + 2t^2}{2}.$$

- b) Pro $t = \sqrt{2}$ má výraz $\sin^4 x + \cos^4 x$ hodnotu $\frac{1}{2}$.
c) Hodnoty vypočítané v části b) i c) se shodují, pro $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ je $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

Metodické poznámky

Nabízené řešení předpokládá schopnost studentů využít zkušeností s úpravami výrazů a goniometrickými vzorci tak, že dokáží zadání upravit na tvar, který vede k známým vztahům. Jedná se o úlohu náročnější na přemýšlení, k jejímu vyřešení však lze vystačit se znalostmi a dovednostmi získanými na základě výuky podle z RVP. S výbornými studenty lze v části a) diskutovat, proč musí platit $t \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$. Rovnici v části c) lze řešit i jinými způsoby, vždy převedením na jednu goniometrickou funkci, např. využitím známých vztahů $\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ nebo $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. V druhém případě je však nutno dát pozor na neekvivalentní úpravy a nezapomenout na zkoušku. Na závěr je vhodné zdůraznit, že v částech b), c) ověřujeme řešení pro jednu konkrétní hodnotu, což nelze zaměnit s důkazem pro všechna reálná čísla.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: posloupnost aritmetická, její difference a základní vzorce

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: posloupnost aritmetická, její difference a základní vzorce

Určete aritmetickou posloupnost, jsou-li dány součty prvních n členů $s_n = 81$, prvních $n + 4$ členů $s_{n+4} = 124$ a difference $d = \frac{1}{2}$.

Řešení

Ze známých vzorců $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ a dále $a_n = a_1 + (n - 1)d$ plyne $s_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. Dosadíme-li dané hodnoty, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned}81 &= na_1 + \frac{n(n-1)\frac{1}{2}}{2}, \\124 &= (n+4)a_1 + \frac{(n+4)(n+3)\frac{1}{2}}{2}.\end{aligned}$$

Po úpravách

$$\begin{aligned}n^2 + (4a_1 - 1) - 324 &= 0, \\n^2 + n(4a_1 + 7) - 484 + 16a_1 &= 0.\end{aligned}$$

Odečteme-li v této soustavě od druhé rovnice rovnici první, máme $8n - 160 + 16a_1 = 0$, odtud vyjádříme $n = 20 - 2a_1$ a dosadíme do první rovnice. Po úpravě dostaneme

$$2a_1^2 - a_1 - 28 = 0$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny $a_1 = 4$, $a_1' = -\frac{7}{2}$.

Závěr. Úloha má dvě řešení. Jsou jimi aritmetické posloupnosti

$$a_1 = 4, \quad d = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad a_1' = -\frac{7}{2}, \quad d' = \frac{1}{2},$$

neboli

$$4, 2, 1, \dots \quad \text{a} \quad -\frac{7}{2}, -\frac{6}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$$

Metodické poznámky

Definiční vlastností aritmetické posloupnosti je, že každý její člen, počínaje druhým, je aritmetickým průměrem sousedních členů

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad n \geq 2$$

Posloupnost bývá obvykle dána prvním členem a diferencí $d = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 2$.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: posloupnost geometrická, její kvocient

V desítkové soustavě určete trojmístné číslo $a_1a_2a_3$ tak, aby jeho číslice tvořily tři za sebou jdoucí členy geometrické posloupnosti se dvěma vlastnostmi

$$a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$$

a obrátíme-li pořadí číslic, vznikne číslo o 279 větší.

Řešení

Původní číslo je $100a_1 + 10a_2 + a_3$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že číslice a_1, a_2, a_3 tvoří první tři členy geometrické posloupnosti s neznámým kvocientem q , proto je $a_3 = a_1q^2$, $a_2 = a_1q$. Dosadíme-li do dané rovnosti $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$, po úpravě dostaneme

$$a_1(2 + 2q^2 - 5q) = 0.$$

Nemá smysl $a_1 = 0$, tedy $2q^2 - 5q + 2 = 0$, odtud $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{1}{2}$. Nyní vezmeme druhou danou rovnost

$$100a_1 + 10a_2 + a_3 = 100a_3 + 10a_2 + a_1 - 292,$$

$$2a_1 + 2a_1q^2 = 5a_1q,$$

$$a_1 = \frac{3}{q^2 - 1}.$$

Odtud pro $q_1 = 2$ je $a_1 = 1$ a pro $q_2 = \frac{1}{2}$ je $a_2 = -4$, což nemá smysl.

Závěr. Číslo je 124.

Metodické poznámky

Definiční vlastností geometrické posloupnosti je, že každý její člen, počínaje druhým, je geometrickým průměrem sousedních členů

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, \quad n \geq 2$$

Posloupnost bývá dána obvykle prvním členem a kvocientem $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n \geq 2$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: posloupnosti aritmetické a geometrické

Jsou-li neznámá reálná čísla x a y prvními dvěma členy geometrické posloupnosti, je rozdíl 4. a 3. členu roven 16; jsou-li x a y prvními dvěma členy aritmetické posloupnosti, je rozdíl 4. a 2. členu roven 18. Určete ta čísla.

Řešení

- a) Jsou-li $a_1 = x$, $a_2 = y$ prvními dvěma členy geometrické posloupnosti, pak její kvocient je

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

a platí

$$a_4 = a_1 q^3 = \frac{y^3}{x^2}, \quad a_3 = a_1 q^2 = \frac{y^2}{x}.$$

Z dané podmínky $a_4 - a_3 = 16$ plyne, že hledaná čísla jsou řešením rovnice

$$\frac{y^3}{x^2} - \frac{y^2}{x} = 16,$$

po úpravě

$$\frac{y^2}{x^2}(y - x) = 16.$$

- b) Jsou-li $a_1 = x$, $a_2 = y$ prvními dvěma členy aritmetické posloupnosti, pak pro její diferenci d platí

$$d = a_2 - a_1 = y - x$$

a platí

$$a_4 = a_1 + 3d = 3y - 2x, \quad a_2 = y.$$

Z dané podmínky $a_4 - a_2 = 18$ plyne, že hledaná čísla jsou řešením rovnice

$$3y - 2x - y = 18,$$

odtud

$$y - x = 9.$$

Dosadíme-li do posledního vztahu v části a) za $y - x = 9$, máme

$$9 \cdot \frac{y^2}{x^2} = 16,$$

odtud

$$y = \pm \frac{4}{3}x.$$

1. Pro $y = \frac{4}{3}x$ je $y - x = \frac{4}{3}x - x = \frac{1}{3}x = 9$, odud $x = 27, y = 36$.

2. Pro $y = -\frac{4}{3}x$ je $y - x = -\frac{4}{3}x - x = -\frac{7}{3}x = 9$, odud $x = -\frac{27}{7}, y = \frac{36}{7}$.

Závěr. Úloha má dvě řešení $x_1 = 27, y_1 = 36, x_2 = -\frac{27}{7}, y_2 = \frac{36}{7}$.

Metodické poznámky

Hledaná čísla jsou řešením poměrně složité soustavy dvou algebraických rovnic o dvou neznámých. První rovnici soustavy dostaneme úpravou poslední rovnice v části a)

$$y^3 - y^2x - 16x^2 = 0,$$

která je stupně tři v neznámých x a y . Druhá rovnice, lineární,

$$y - x = 0$$

je v části b). Soustavu jsme z metodických důvodů řešili vhodným dosazováním.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: geometrická posloupnost, geometrická řada

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost, vzorec pro n -tý člen a vzorec pro součet n členů

Určete 1. člen a n -tý člen geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, v níž $q = 2$ a $s_n = 1533$, kde $n = 9$.

Řešení

Použijeme vzorec pro součet n členů geometrické posloupnosti, kde $n = 9$.

$$s_9 = a_1 \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 1533,$$

z toho $511a_1 = 1533$, takže $a_1 = 3$. Podle vzorce pro n -tý člen geometrické posloupnosti je $a_9 = 3 \cdot 2^8 = 3 \cdot 256 = 768$.

Závěr. $a_1 = 3$, $a_9 = 768$.

Metodické poznámky

Jde o úlohu, při níž se využijí oba základní vzorce pro geometrickou posloupnost.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost, vzorec pro n -tý člen, operace s komplexními čísly (sčítání, odčítání, násobení, dělení)

V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_2 = \frac{1}{4}(1 - 7i)$, $a_3 = -\frac{1}{8}(13 + 9i)$. Vypočtěte a_1 .

Řešení

Nejprve vypočteme kvocient q . Ježto $a_3 = a_2 \cdot q$, je

$$\begin{aligned} q &= \frac{a_3}{a_2} = \frac{-\frac{1}{8}(13 + 9i)}{\frac{1}{4}(1 - 7i)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{13 + 9i}{1 - 7i} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(13 + 9i)(1 + 7i)}{(1 - 7i)(1 + 7i)} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{13 + 9i + 91i - 63}{1 + 49} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-50 + 100i}{50}, \end{aligned}$$

takže

$$q = \frac{1}{2}(1 - 2i).$$

Jelikož $a_2 = a_1 \cdot q$, je

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\frac{1}{4}(1-7i)}{\frac{1}{2}(1-2i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-7i+2i+14}{1+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15-5i}{5},$$

takže

$$a_1 = \frac{1}{2}(3-i).$$

Metodické poznámky

Úloha je vhodná k procvičení práce s komplexními čísly.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost, vzorec pro n -tý člen, definiční obor jednoduché nerovnice s absolutní hodnotou

V geometrické posloupnosti je $a_2 = \frac{x^2}{4}$, $a_5 = \frac{2}{x}$.

- a) Vypočtete a_4 .
b) Z této posloupnosti vytvoříme řadu; zjistěte, pro která x je tato řada konvergentní a vypočtete její součet $s(x)$.

Řešení

Daná posloupnost je definována pro $x \neq 0$.

- a) Platí $a_5 = a_2 \cdot q^3$, takže

$$q^3 = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{8}{x^3}$$

a odsud $q = \frac{2}{x}$. Proto hledané

$$a_4 = a_2 \cdot q^2 = \frac{x^2}{4} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 1.$$

- b) Geometrická řada je konvergentní pro $\left|\frac{2}{x}\right| < 1$. Z toho $|x| > 2$; řada je tedy konvergentní na množině $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Vypočteme první člen řady

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{2}{x}} = \frac{x^3}{8}.$$

$$s(x) = a_1 \frac{1}{1-q} = \frac{x^3}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{x^3}{8} \cdot \frac{1}{\frac{x-2}{x}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^4}{x-2}.$$

Součet řady je pro $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ roven $s(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^4}{x-2}$.

Závěr.

a) $a_4 = 1$;

b) Řada je konvergentní na množině $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ a platí $s(x) = \frac{1}{8} \frac{x^4}{x-2}$.

Metodické poznámky

Vidíme, že už nemusíme zvlášť uvádět podmínku $x \neq 2$.

Úloha 4 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: konvergence geometrické řady, její součet, řešení soustavy nerovnic, resp. nerovnic s neznámou ve jmenovateli zlomku

Rozhodněte, pro která x konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x+2}{x-4} \right)^n$$

a vypočítejte její součet.

Řešení

Předně platí $x \neq 4$. První člen této řady je $a_1 = \frac{3x+2}{x-4}$ a rovněž kvocient $q = a_1 = \frac{3x+2}{x-4}$. Geometrická řada konverguje pro $|q| < 1$, tj. $\left| \frac{3x+2}{x-4} \right| < 1$. Vyjádřeme tuto nerovnici ve tvaru

$$-1 < \frac{3x+2}{x-4} < 1. \quad (*)$$

a) pro $x > 4$ vynásobíme tuto nerovnici výrazem $x-4$, $-(x-4) < 3x+2 < x-4$, tedy platí $-(x-4) < 3x+2 \wedge (3x+2 < x-4)$. První nerovnice dává $4x > 2 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$, druhá $2x < -6 \Rightarrow x < -3$. Vidíme, že v tomto případě nemá soustava řešení.

b) pro $x < 4$ opět násobíme nerovnici (*) výrazem $x-4$, $-(x-4) > 3x+2 > x-4$, takže platí $-(x-4) > 3x+2 \wedge (3x+2 > x-4)$. První nerovnice dává $4x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$, druhá $2x > -6 \Rightarrow x > -3$. K tomu ještě máme podmínku $x < 4$, takže výsledek je: Daná řada konverguje pro $-3 < x < \frac{1}{2}$. Podle vzorce pro součet geometrické řady platí

$$s(x) = \frac{3x+2}{x-4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3x+2}{x-4}}.$$

Upravíme jmenovatele

$$J = 1 - \frac{3x+2}{x-4} = \frac{x-4-3x-2}{x-4} = -\frac{2x+6}{x-4}.$$

Takže

$$s(x) = -\frac{3x+2}{x-4} \cdot \frac{x-4}{2x+6} = -\frac{3x+2}{2x+6}.$$

Metodické poznámky

Je vhodné ověřit výsledek zkouškou např. pro $x_0 = -2$.

Úloha 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: konvergence a součet geometrické řady, úprava algebraického výrazu, řešení lineární rovnice a řešení nerovnice s absolutní hodnotou a neznámou ve jmenovateli zlomku

Je dána nerovnice

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{x-1} \right)^{n-1} \leq 3 \cdot \frac{x-5}{x-6}.$$

- a) Pro které hodnoty x je levá strana rovnice konvergentní řada?
- b) Nerovnici vyřešte.
- c) Jaká je číselná hodnota kvocientu v případě rovnosti?

Řešení

Předně musí platit podmínky $x \neq 1$, $x \neq 6$.

- a) Kvocient této geometrické řady je $q = \frac{5}{x-1}$. Tato řada je konvergentní, právě když $|q| < 1$, tedy $\left| \frac{5}{x-1} \right| < 1$. Odsud $\frac{|x-1|}{5} > 1 \Rightarrow |x-1| > 5$. Pro $x > 1$ je $|x-1| = x-1 \Rightarrow x-1 > 5 \Rightarrow x > 6$; pro $x < 1$ je $|x-1| = -x+1 \Rightarrow -x+1 > 5 \Rightarrow x < -4$.

Závěr. Daná řada je konvergentní pro $x \in (-\infty; -4) \cup (6; +\infty)$.

- b) Nejprve najdeme součet $s(x)$ řady na levé straně dané rovnice. Pro $n = 1$ dostáváme první člen řady $a_1 = 1$, takže

$$s(x) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{5}{x-1}} = \frac{1}{\frac{x-1-5}{x-1}} = \frac{x-1}{x-6}.$$

Danou nerovnici tak lze upravit na tvar $\frac{x-1}{x-6} \leq 3 \cdot \frac{x-5}{x-6}$. Vynásobíme nerovnici výrazem $x-6$ za podmínky $x > 6$ a dostáváme

$$x-1 \leq 3 \cdot (x-5) \Rightarrow x-1 \leq 3x-15 \Rightarrow x \geq 7.$$

Předchozí podmínka je pro tyto hodnoty x splněna a rovněž levá strana nerovnice je konvergentní řada. Nyní vynásobíme nerovnici výrazem $x-6$ za podmínky $x < 6$ a dostáváme

$$x-1 \geq 3 \cdot (x-5) \Rightarrow x-1 \geq 3x-15 \Rightarrow x \leq 7.$$

Pro tyto hodnoty x musí být splněny ještě další podmínky, a to $x < 6$, $x \neq 1$ a konvergence řady na intervalu $(-\infty; -4)$, výsledné hodnoty jsou tedy $x < -4$.

Závěr. Množina všech řešení dané nerovnice je $(-\infty; -4) \cup \langle 7; +\infty)$.

- c) V zadané nerovnici nastává rovnost jen v případě $x = 7$, pak kvocient

$$q = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{7-1} = \frac{5}{6}.$$

Metodické poznámky

Je třeba, aby si žáci v bodě b) uvědomili, že součet řady na levé straně nerovnice má odvozený tvar zlomku jen v oblasti konvergence řady.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: nekonečná geometrická řada, nerovnice v podílovém tvaru

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: nekonečná geometrická řada a její součet, řešení nerovnice v podílovém tvaru

Je dána nekonečná geometrická řada $x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{27}x^4 + \dots$. Určete všechna reálná čísla x , pro něž je součet této řady menší než 4.

Řešení

První člen této geometrické řady je $a_1 = x$ a kvocient $q = -\frac{1}{3}x$. Aby řada konvergovala, musí platit

$$\left| -\frac{1}{3}x \right| < 1, \quad \text{neboli} \quad |x| < 3, \quad \text{tj.} \quad x \in (-3; 3).$$

Součet řady je

$$\frac{x}{1 - \left(-\frac{1}{3}x\right)} = \frac{3x}{x+3}.$$

Řešíme rovnici

$$\frac{3x}{x+3} < 4,$$

kterou upravíme na tvar

$$\frac{-x-12}{x+3} < 0, \quad \text{neboli} \quad \frac{x+12}{x+3} > 0.$$

Ze znalosti řešení nerovnice v podílovém tvaru dostaneme $x \in (-\infty; -12) \cup (-3; +\infty)$.

Pro hledaná čísla x musí platit zároveň podmínky $x \in (-3; 3)$ a $x \in (-\infty; -12) \cup (-3; +\infty)$, odkud dostáváme řešení úlohy $x \in (-3; 3)$.

Závěr. Hledaná čísla x jsou právě všechna ta, která patří do množiny $(-3; 3)$.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na zvládnutí základních pojmů a dovedností středoškolské matematiky. Její větší obtížnost je v tom, že spojuje dva různé jevy.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: nekonečná geometrická řada a její součet, řešení nerovnice v podílovém tvaru, řešení lineární nerovnice s absolutní hodnotou

Je dána nekonečná geometrická řada $(|x| - 1) + (|x| - 1)^2 + (|x| - 1)^3 + \dots$. Určete všechna reálná čísla x , pro něž je součet této řady menší než 1.

Řešení

První člen této geometrické řady je $a_1 = |x| - 1$ a kvocient $q = |x| - 1$. Aby řada konvergovala, musí platit $||x| - 1| < 1$, neboli $0 < |x| < 2$, neboli $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$. Součet řady tak je

$$\frac{|x| - 1}{1 - (|x| - 1)} = \frac{|x| - 1}{-|x| + 2}.$$

Řešíme rovnici

$$\frac{|x| - 1}{-|x| + 2} < 1,$$

kterou upravíme na tvar

$$\frac{2|x| - 3}{-|x| + 2} < 0, \quad \text{neboli} \quad \frac{2(|x| - \frac{3}{2})}{|x| - 2} > 0.$$

Ze znalosti řešení nerovnice v podílovém tvaru dostaneme $|x| < \frac{3}{2}$ nebo $|x| > 2$. Odtud $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}) \cup (2; +\infty)$. Pro hledaná čísla x musí platit současně podmínky $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$ a $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}) \cup (2; +\infty)$, odkud dostáváme řešení úlohy $x \in (-\frac{3}{2}; 0) \cup (0; \frac{3}{2})$.

Závěr. Hledaná čísla x jsou všechna ta, která patří do množiny $(-\frac{3}{2}; 0) \cup (0; \frac{3}{2})$.

Metodické poznámky

Oproti předchozí úloze je navíc třeba vyřešit nerovnici s absolutní hodnotou, což je sice klasická školní úloha, ale ve spojení s geometrickou řadou to dělá úlohu složitější.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: nekonečná geometrická řada a její součet, řešení nerovnice v podílovém tvaru, řešení lineární nerovnice s absolutní hodnotou, logaritmická nerovnice

Je dána nekonečná geometrická řada

$$\frac{1}{\log(|x| + 2)} + \frac{1}{\log^2(|x| + 2)} + \frac{1}{\log^3(|x| + 2)} + \dots$$

Určete všechna reálná čísla x , pro něž je součet této řady menší než 1.

Řešení

První člen této geometrické řady je

$$a_1 = \frac{1}{\log(|x| + 2)} \quad \text{a kvocient} \quad q = \frac{1}{\log(|x| + 2)}.$$

Aby řada konvergovala, musí platit

$$\left| \frac{1}{\log(|x| + 2)} \right| < 1.$$

Jelikož je $|x| + 2 \geq 2$, je $\log(|x| + 2) > 0$, takže pro kvocient platí

$$\frac{1}{\log(|x| + 2)} < 1, \quad \text{neboli} \quad \log(|x| + 2) > 1.$$

Tuto nerovnici upravíme na tvar

$$|x| + 2 > 10, \quad \text{odkud} \quad x \in (-\infty; -8) \cup (8; +\infty).$$

Součet řady je

$$\frac{1}{\frac{\log(|x| + 2)}{1 - \frac{1}{\log(|x| + 2)}}} = \frac{1}{\log(|x| + 2) - 1}.$$

Řešíme nerovnici

$$\frac{1}{\log(|x| + 2) - 1} < 1, \quad \text{neboli} \quad \frac{2 - \log(|x| + 2)}{\log(|x| + 2) - 1} < 0.$$

Odtud máme

$$\frac{\log(|x| + 2) - 2}{\log(|x| + 2) - 1} > 0.$$

Ze znalosti řešení nerovnice v podílovém tvaru dostaneme

$$[\log(|x| + 2) < 1] \vee [\log(|x| + 2) > 2], \quad \text{neboli} \quad [|x| + 2 < 10] \vee [|x| + 2 > 100].$$

Odtud $(|x| < 8) \vee (|x| > 98)$, tedy $x \in (-\infty; -98) \cup (-8; 8) \cup (98; +\infty)$. Pro hledaná čísla x musí platit podmínky

$$[x \in (-\infty; -8) \cup (8; +\infty)] \wedge [x \in (-\infty; -98) \cup (-8; 8) \cup (98; +\infty)],$$

odkud dostáváme řešení úlohy $x \in (-\infty; -98) \cup (98; +\infty)$.

Závěr. Řešením dané úlohy jsou všechna $x \in (-\infty; -98) \cup (98; +\infty)$.

Metodické poznámky

Oproti předchozí úloze je navíc třeba vyřešit logaritmickou nerovnici, což je sice klasická školní úloha, ale ve spojení s geometrickou řadou a absolutní hodnotou to dělá úlohu složitější.

Zdroj:

Zhouf, J.: *Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku*. Praha: PedF UK, 2010.

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: určení a vlastnosti posloupností, aritmetická a geometrická posloupnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: aritmetická posloupnost

Součet prvních devíti po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti je 126. Součet prvních sedmnácti po sobě jdoucích členů téže posloupnosti je 0.

- a) Určete pátý člen této posloupnosti.
- b) Určete její diferenci.

Řešení

- a) Součet prvních devíti členů aritmetické posloupnosti je

$$s_9 = \frac{(a_1 + a_9) \cdot 9}{2},$$

kde první a devátý člen posloupnosti lze vyjádřit pomocí pátého členu a difference $a_1 = a_5 - 4d$, $a_9 = a_5 + 4d$. Pak

$$s_9 = \frac{(a_5 - 4d + a_5 + 4d) \cdot 9}{2} = 9a_5 = 126,$$

odkud $a_5 = 14$.

- b) Součet prvních sedmnácti členů aritmetické posloupnosti je

$$s_{17} = \frac{(a_1 + a_{17}) \cdot 17}{2},$$

kde $a_1 = a_9 - 8d$, $a_{17} = a_9 + 8d$. Pak

$$s_{17} = \frac{(a_9 - 8d + a_9 + 8d) \cdot 17}{2} = 17a_9 = 0,$$

odkud $a_9 = 0$.

Diferenci je pak možno vypočítat dosazením výše vypočítaného pátého a devátého členu do rovnosti $a_9 = a_5 + 4d$, tedy

$$d = \frac{0 - 14}{4} = -\frac{7}{2}.$$

Závěr. Pátý člen dané posloupnosti je $a_5 = 14$, difference posloupnosti je $d = -\frac{7}{2}$.

Metodické poznámky

Úlohu lze řešit pomocí soustavy rovnic, které vycházejí ze vztahů mezi prvním, pátým, devátým a sedmnáctým členem aritmetické posloupnosti, její difference a vzorce pro součet prvních devíti, respektive sedmnácti členů posloupnosti. V tomto případě však může být řešení mnohem pracnější. Části a) b) lze zadat pro práci ve skupinách:

- pro úroveň 1 samostatně a),
- pro vyšší úroveň samostatně b).

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: aritmetická posloupnost, soustava lineární a kvadratické rovnice, substituce při řešení rovnic

Součin 100. a 101. členu klesající aritmetické posloupnosti je 144. Součet těchto členů je 25. Určete první člen posloupnosti.

Řešení

Zadání lze přepsat jako soustavu rovnic

$$a_{100} \cdot a_{101} = 144,$$

$$a_{100} + a_{101} = 25.$$

Z druhé rovnice je možno vyjádřit a_{101} a dosadit do první rovnice $a_{100} \cdot (25 - a_{100}) = 144$, po úpravě

$$(a_{100})^2 - 25a_{100} + 144 = 0,$$

odkud $a_{100} = 16$ nebo $a_{100} = 9$. Jelikož $a_{101} = 25 - a_{100}$ a posloupnost je klesající, je $a_{101} = 25 - a_{100} < a_{100}$, čemuž vyhovuje pouze $a_{100} = 16$ a $a_{101} = 9$. Difference pak je

$$d = a_{101} - a_{100} = 9 - 16 = -7.$$

První člen posloupnosti $a_1 = a_{101} - 100 \cdot (-7) = 709$.

Závěr. První člen posloupnosti $a_1 = 709$.

Metodické poznámky

Úlohu lze řešit vyjádřením 100. a 101. členu pomocí prvního, což opět vede k soustavě rovnic o dvou neznámých (a_1 a difference d), posléze k rovnici kvadratické. Výše uvedené řešení je však jednodušší. Někteří studenti pravděpodobně najdou dvě po sobě jdoucí čísla, jejichž rozdíl a součet znají, z paměti. Tady je vhodné připomenout, že vlastně použili postup, který znají z rozkladu kvadratického trojčlenu dle Viètových vztahů.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost, soustavy rovnic, substituce, kvadratická rovnice

Délky stran trojúhelníku tvoří geometrickou posloupnost. Obvod trojúhelníku je 37. Součet obsahů čtverců nad všemi třemi stranami je 481. Jaké jsou délky těchto stran?

Řešení

Označme délky stran trojúhelníka $a = \frac{x}{q}$, $b = x$, $c = x \cdot q$. Dle zadání platí

$$a + b + c = 37 \quad \wedge \quad a^2 + b^2 + c^2 = 481,$$

po dosazení a vytknutí

$$x \left(\frac{1}{q} + 1 + q \right) = 37, \tag{1}$$

$$x^2 \left(\frac{1}{q^2} + 1 + q^2 \right) = 481. \tag{2}$$

Použijeme substituci $\frac{1}{q} + q = y$, odkud

$$\left(\frac{1}{q} + q \right)^2 = \frac{1}{q^2} + 2 + q^2 = y^2,$$

tedy

$$\frac{1}{q^2} + q^2 = y^2 - 2$$

a dosadíme do výše uvedených rovnic.

Pak z (1) lze dostat $x(y + 1) = 37$, ze zadání $y > 0$, tedy $y + 1 \neq 0$, takže

$$x = \frac{37}{y + 1}.$$

Z (2) dostaneme $x^2(y^2 - 2 + 1) = 481$, po dosazení a úpravě $37^2 \cdot \frac{y-1}{y+1} = 481$, odkud $37(y - 1) = 13(y + 1)$, tedy

$$y = \frac{25}{12} \quad \text{a} \quad x = \frac{37}{\frac{25}{12} + 1} = 12.$$

Po návratu k substituci $\frac{1}{q} + q = \frac{25}{12}$ je $q = \frac{4}{3}$ nebo $q = \frac{3}{4}$.

V prvním případě

$$a = \frac{x}{q} = \frac{12}{\frac{4}{3}} = 9, \quad b = x = 12, \quad c = 12 \cdot \frac{4}{3} = 16,$$

druhé řešení

$$a = 16, \quad b = 12, \quad c = 9.$$

Pokud nezáleží na pojmenování stran, jsou obě řešení totožná, strany trojúhelníka mají délky 9, 12, 16.

Závěr. Trojúhelník splňující podmínky zadání má strany o délkách 9, 12, 16.

Metodické poznámky

Úlohu lze zařadit do kapitoly řešení rovnic a jejich soustav. Pokud student začne řešit bez výše uvedené substituce umocněním rovnice (1) a následným vyjádřením x^2 , dostane se k reciproké rovnici čtvrtého stupně, což přesahuje rámec RVP. Úloha je však mířena k nadaným studentům (úroveň 3) a jednotlivé kroky řešení reciproké rovnice v oboru reálných čísel jsou obsaženy v RVP. Výše uvedeným postupem se však i tomuto problému vyhneme.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: aritmetická posloupnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi členy aritmetické posloupnosti, řešení lineárních rovnic

Mezi čísla 1 a 67 bylo vloženo několik přirozených čísel tak, že jsme získali členy aritmetické posloupnosti. Jejich součet je 408. Kolik čísel jsme mezi obě čísla vložili?

Řešení

Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je dán

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n),$$
$$408 = \frac{n}{2} (1 + 67),$$

odkud $n = 12$. Mezi krajní dvě čísla tedy musíme vložit 10 čísel. Mezi krajními hodnotami je rozdíl 11 diferencí, odkud snadno dopočteme $d = 6$, tj. skutečně se jedná o aritmetickou posloupnost tvořenou přirozenými čísly.

Závěr. Mezi čísla 1 a 67 jsme za daných podmínek vložili 10 přirozených čísel.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na součtu členů aritmetické posloupnosti. Při řešení je nutno provést kontrolu, že se skutečně jedná o posloupnost přirozených čísel.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi členy aritmetické posloupnosti, dělitelnost v oboru přirozených čísel

Kolika způsoby lze mezi čísla 1 a 2014 vložit několik přirozených čísel, abychom získali členy aritmetické posloupnosti?

Řešení

Označme $a_1 = 1$ a $a_n = 2014$. Jsou-li všechny členy posloupnosti přirozené, je také difference přirozené číslo. Proto

$$a_n - a_1 = (n - 1)d = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61.$$

Diference je proto dělitelem čísla 2013 a nabývá tak jedné z hodnot 1, 3, 11, 33, 61, 183 nebo 671. Celkově tak existuje 7 možností.

Závěr. Daná úloha má celkem 7 řešení.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na dělitelnosti rozdílu příslušných členů aritmetické posloupnosti. Dělitelem je také číslo 2013, v takovém případě však nevkládáme žádné číslo.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi členy aritmetické posloupnosti, dělitelnost v oboru přirozených čísel

Jaký nejmenší možný počet přirozených čísel musíme vložit mezi čísla 1 a 2014, abychom získali členy aritmetické posloupnosti a jedním z čísel bylo číslo 1 000?

Řešení

Rozdíl mezi členy 1 a 1 000 je roven 999. Rozdíl mezi členy 1 000 a 2014 je roven 1 014. Hledaná difference musí být společným dělitelem obou čísel 999 a 1 014. Tímto číslem je zřejmě $d = 3$.

Rozdíl mezi členy 2014 a 1 je $2013 = 3 \cdot 671$, proto musíme mezi daná čísla vložit alespoň 670 čísel.

Závěr. Mezi daná čísla je tedy třeba vložit alespoň 670 přirozených čísel.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na dělitelnosti rozdílu příslušných členů aritmetické posloupnosti.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: aritmetická posloupnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: aritmetická posloupnost, součet prvních několika členů aritmetické posloupnosti

Vypočítejte součet $s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1} n$ pro libovolné přirozené číslo n . Úlohu řešte zvlášť pro n sudé a n liché.

Řešení

- Pro n sudé je

$$s_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (n-1) - n = (1-2) + (3-4) + \dots + [(n-1) - n] = (-1) \frac{n}{2} = -\frac{n}{2},$$

neboť v každé závorce je hodnota -1 a závorek je $\frac{n}{2}$.

- Pro n liché je

$$\begin{aligned} s_n &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - (n-1) + n = \\ &= 1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + \dots + (-(n-1) + n) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

neboť v každé závorce je hodnota 1 a závorek je $\frac{n-1}{2}$.

Závěr. Hledaný součet je $s_n = -\frac{1}{2}n$ pro n sudé a $s_n = \frac{1}{2}(n+1)$ pro n liché.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na výpočet součtu konečného počtu za sebou jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Obtížné na úloze je to, že se musí nejprve ta aritmetická posloupnost odhalit.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: aritmetická posloupnost, součet prvních několika členů aritmetické posloupnosti, vzorec pro rozklad rozdílu třetích mocnin čísel

Vypočítejte součet $s_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2$ pro libovolné přirozené číslo n . Úlohu řešte zvlášť pro n sudé a n liché.

Řešení

- Pro n sudé je

$$\begin{aligned}s_n &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (n-1)^2 - n^2 = \\&= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + ((n-1)^2 - n^2) = \\&= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + ((n-1)-n)((n-1)+n) = \\&= -(1+2+3+4+\dots+(n-1)+n) = -\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

- Pro n liché je

$$\begin{aligned}s_n &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - (n-1)^2 + n^2 = \\&= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + ((n-2)^2 - (n-1)^2) + n^2 = \\&= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + \\&\quad + ((n-2)-(n-1))((n-2)+(n-1)) + n^2 = \\&= -(1+2+3+4+\dots+(n-2)+(n-1)) + n^2 = -\frac{(n-1)n}{2} + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Závěr. Hledaný součet je $s_n = -\frac{1}{2}n(n+1)$ pro n sudé a $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ pro n liché.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na výpočet součtu konečného počtu za sebou jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Obtížné na úloze je to, že se musí nejprve ta aritmetická posloupnost odhalit. Oproti předchozí úloze je třeba pracovat navíc s druhými mocninami a se vzorcem pro rozdíl druhých mocnin.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: aritmetická posloupnost, součet prvních několika členů aritmetické posloupnosti, vzorec pro rozklad rozdílu třetích mocnin čísel

Vypočítejte součet $s_n = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \dots + (-1)^{n-1} n \cdot (n+1)$ pro libovolné přirozené číslo n . Úlohu řešte zvlášť pro n sudé a n liché.

Řešení

- Pro n sudé je

$$\begin{aligned}s_n &= 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \dots - n \cdot (n+1) = \\&= (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3) + (3 \cdot 4 - 4 \cdot 5) + \dots + ((n-1) \cdot n - n \cdot (n+1)) = \\&= (2 \cdot (1-3)) + (4 \cdot (3-5)) + \dots + (n \cdot (n-1-n-1)) = \\&= -2 \cdot (2+4+\dots+n) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} (n+2) = -\frac{n(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

- Pro n liché je

$$\begin{aligned} s_n &= 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 + \dots - (n-1) \cdot n + n \cdot (n+1) = \\ &= (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3) + (3 \cdot 4 - 4 \cdot 5) + \dots + ((n-2)(n-1) - (n-1)n) + n(n+1) = \\ &= -\frac{(n-1)(n+1)}{2} + n(n+1) = (n+1) \frac{-n+1+2n}{2} = \frac{(n+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Závěr. Hledaný součet je $s_n = -\frac{1}{2}n(n+2)$ pro n sudé a $s_n = \frac{1}{2}(n+1)^2$ pro n liché.

Metodické poznámky

Úloha je zaměřena na výpočet součtu konečného počtu za sebou jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Obtížné na úloze je to, že se musí nejprve ta aritmetická posloupnost odhalit. Oproti předchozí úloze je třeba pracovat se součtem sudých čísel. V případě sudého čísla n je ale počet sčítanců roven $n/2$.

Zdroj: sborníky matematické olympiády

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: součet členů posloupnosti, důkaz matematickou indukcí

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: posloupnost, součet prvních několika členů posloupnosti, důkaz matematickou indukcí

Matematickou indukcí dokažte, že pro všechna sudá čísla n platí rovnost

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (n-1)^2 - n^2 = -\frac{1}{2}n(n+1).$$

Řešení

Pro $n = 2$ rovnost platí, neboť $1^2 - 2^2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3$.

Předpokládejme, že pro libovolné, ale pevné sudé číslo n platí rovnost

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (n-1)^2 - n^2 = -\frac{1}{2}n(n+1)$$

a dokažme, že platí pro $n+2$ rovnost

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (n-1)^2 - n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2 = -\frac{1}{2}(n+2)(n+3).$$

Provedeme postupně následující úpravy

$$\begin{aligned} &1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (n-1)^2 - n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2 = \\ &= -\frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)^2 - (n+2)^2 = \\ &= -\frac{1}{2}n(n+1) + ((n+1) - (n+2))((n+1) + (n+2)) = -\frac{1}{2}n(n+1) - (2n+3) = \\ &= -\frac{1}{2}(n^2 + 5n + 6) = -\frac{1}{2}(n+2)(n+3). \end{aligned}$$

Závěr. Rovnost $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (n-1)^2 - n^2 = -\frac{1}{2}n(n+1)$ platí pro každé sudé číslo n .

Metodické poznámky

Jde o úlohu na využití důkazu matematickou indukcí. Její vyšší obtížnost je v tom, že matematická indukce probíhá s krokem 2.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: posloupnost, součet prvních několika členů posloupnosti, důkaz matematickou indukcí

Matematickou indukcí dokažte, že pro všechna sudá čísla n platí rovnost

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (n-1)n = \frac{1}{12}n(n+2)(2n-1).$$

Řešení

Pro $n = 2$ rovnost platí, neboť $1 \cdot 2 = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$.

Předpokládejme, že pro libovolné, ale pevné sudé číslo n platí rovnost

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (n-1)n = \frac{1}{12}n(n+2)(2n-1)$$

a dokažme, že platí pro $n+2$ rovnost

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (n-1)n + (n+1)(n+2) = \frac{1}{12}(n+2)(n+4)(2n+3).$$

Provedeme postupně následující úpravy

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (n-1)n + (n+1)(n+2) &= \\ &= \frac{1}{12}n(n+2)(2n-1) + (n+1)(n+2) = \\ &= \frac{1}{12}(n+2)(n(2n-1) + 12(n+1)) = \\ &= \frac{1}{12}(n+2)(2n^2 + 11n + 12) = \frac{1}{12}(n+2)(n+4)(2n+3). \end{aligned}$$

Závěr. Rovnost $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (n-1)n = \frac{1}{12}n(n+2)(2n-1)$ platí pro každé sudé číslo n .

Metodické poznámky

Jde o úlohu na využití důkazu matematickou indukcí. Její vyšší obtížnost je v tom, že matematická indukce probíhá s krokem 2.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: posloupnost, součet prvních několika členů posloupnosti, vzorec pro rozklad rozdílu třetích mocnin čísel, důkaz matematickou indukcí

Matematickou indukcí dokažte, že pro každé sudé číslo n platí rovnost

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (n-1)^3 - n^3 = -\frac{1}{4}n^2(2n+3).$$

Výsledek ověřte důkazem přímým, kde využijte výsledků z úloh 1 a 2.

Řešení

Pro $n = 2$ rovnost platí, neboť $1^3 - 2^3 = -\frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot 7$.

Předpokládejme, že pro libovolné, ale pevné sudé číslo n platí rovnost

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (n-1)^3 - n^3 = -\frac{1}{4}n^2(2n+3)$$

a dokažme, že platí pro $n+2$ rovnost

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (n-1)^3 - n^3 + (n+1)^3 - (n+2)^3 = -\frac{1}{4}(n+2)^2(2n+7).$$

Provedeme postupně následující úpravy

$$\begin{aligned}1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (n-1)^3 - n^3 + (n+1)^3 - (n+2)^3 &= \\&= -\frac{1}{4}n^2(2n+3) + (n+1)^3 - (n+2)^3 = \\&= -\frac{1}{4}n^2(2n+3) + (n+1-n-2)((n+1)^2 + (n+1)(n+2) + (n+2)^2) = \\&= -\frac{1}{4}n^2(2n+3) - (3n^2+9n+7) = -\frac{1}{4}(2n^3+15n^2+36n+28) = \\&= -\frac{1}{4}(2n^3+15n^2+36n+28) = -\frac{1}{4}(n+2)(2n^2+11n+14) = \\&= -\frac{1}{4}(n+2)^2(2n+7).\end{aligned}$$

Závěr. Rovnost $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (n-1)^3 - n^3 = -\frac{1}{4}n^2(2n+3)$ platí pro každé sudé číslo n .

Metodické poznámky

Jde o úlohu na využití důkazu matematickou indukcí. Její vyšší obtížnost je v tom, že matematická indukce probíhá s krokem 2.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: posloupnost, aritmetická posloupnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: součet prvních n členů aritmetické posloupnosti, aritmetická posloupnost

V řádcích tabulky jsou uvedeny některé informace o aritmetických posloupnostech. Doplňte chybějící údaje.

a_1	d	n	a_n	s_n
	-12		15	456
4	-0,5			0
		8	69	356
2			32	119

Řešení

Použijeme vztah pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad (1)$$

a dále předpis pro n -tý člen aritmetické posloupnosti

$$a_n = a_1 + (n - 1) d. \quad (2)$$

V prvním řádku tabulky dle vztahu (1) platí $456 = \frac{n}{2} (a_1 + 15)$, vyjádříme a_1 pomocí n . Použijeme (2) a dostaneme

$$a_1 + (n - 1) \cdot (-12) = 15,$$

tedy $a_1 = 3 + 12n$. Dosadíme za a_1 , získáme $456 = \frac{n}{2} (3 + 12n + 15)$. Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $2n^2 + 3n - 152 = 0$ s jediným kladným kořenem $n = 8$. Dopočítáme $a_1 = 99$.

V druhém řádku dosadíme do vztahu (1)

$$0 = \frac{n}{2} (4 + 4 + (n - 1) \cdot (-0,5)),$$

dostáváme opět kvadratickou rovnici $n^2 - 17n = 0$ s kladným kořenem $n = 17$. Dopočítáme $a_n = -4$.

Ze třetího řádku opět použijeme vztah (1) a dostáváme $356 = \frac{8}{2} (a_1 + 69)$, vyjádříme $a_1 = 20$. Dopočítáme $d = 7$.

Čtvrtý řádek tabulky převedeme dle vztahu (1) $119 = \frac{n}{2} (2 + 32)$, dostaneme $n = 7$, a $d = 5$.

Závěr.

a_1	d	n	a_n	s_n
99	-12	8	15	456
4	-0,5	17	-4	0
20	7	8	69	356
2	5	7	32	119

Metodické poznámky

Při výpočtech si žáci opakují řešení kvadratické rovnice, vyjádření neznámé ze vzorce a vztahy v aritmetické posloupnosti. Úlohu je možno rozšířit pro práci ve skupinách a vytvořit různá zadání – např. zadat výše uvedené vzorce v Excelu.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: aritmetická posloupnost, součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

V polích obdélníkové tabulky s m řádky a n sloupci je zapsáno mn reálných čísel. Čísla v každém řádku i v každém sloupci tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete součet S všech čísel tabulky, znáte-li součet s čtyř čísel, která jsou zapsána v jejích čtyřech rohových polích.

Řešení

Zadání odpovídá tabulka

A_{11}	A_{12}	$\dots$	A_{1n}
A_{21}	A_{22}	$\dots$	A_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_{m1}	A_{m2}	$\dots$	A_{mn}

Ze zadání víme, že $A_{11} + A_{1n} + A_{m1} + A_{mn} = s$, dále můžeme vyjádřit součty v jednotlivých řádcích

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{n}{2} (A_{11} + A_{1n}), \\
 s_2 &= \frac{n}{2} (A_{21} + A_{2n}), \\
 &\vdots \\
 s_m &= \frac{n}{2} (A_{m1} + A_{mn}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

a podobně lze vyjádřit i součty v jednotlivých sloupcích (například součet čísel v prvním sloupci lze zapsat $\frac{m}{2} (A_{11} + A_{m1})$). Když sečteme všechny řádkové součty, dostaneme součet všech čísel v tabulce

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_m.$$

Dosadíme ze vztahů (3)

$$S = \frac{n}{2} (A_{11} + A_{1n} + A_2 + A_{2n} + \dots + A_{m1} + A_{m2}),$$

využijeme toho, že můžeme vyjádřit součty ve sloupcích a čísla v závorce uspořádat

$$\begin{aligned} S &= \frac{n}{2} (A_{11} + A_{21} + \dots + A_{m1} + A_{1n} + A_{2n} + \dots + A_{mn}) = \\ &= \frac{n}{2} \left(\frac{m}{2} (A_{11} + A_{m1}) + \frac{m}{2} (A_{1n} + A_{mn}) \right), \end{aligned}$$

vytkneme $\frac{m}{2}$ a dostáváme po úpravě $S = \frac{1}{4}mns$.

Závěr. Hledaný součet čísel v tabulce je $S = \frac{1}{4}mns$.

Metodické poznámky

Obtížnost úlohy spočívá především v neobvyklém zadání a jeho obecnosti. Pro usnadnění nebo závěrečné vysvětlení je vhodné zadat konkrétní počet sloupců i řádků.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: aritmetická posloupnost, součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

Jsou dána přirozená čísla m , n a aritmetická posloupnost, ve které je součet prvních n členů roven součtu prvních m členů ($m \neq n$). Určete součet prvních $m + n$ členů této posloupnosti.

Řešení

Použijeme vztah pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n). \quad (4)$$

Dle (4) vyjádříme s_n a s_m

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d) = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d), \\ s_m &= \frac{m}{2} (2a_1 + (m-1) \cdot d). \end{aligned}$$

Ze zadání víme, že $s_n = s_m$. Platí tedy

$$\frac{n}{2} (2a_1 + (n-1) \cdot d) = \frac{m}{2} (2a_1 + (m-1) \cdot d).$$

Po úpravách dostáváme

$$2a_1 = -d(m+n-1). \quad (5)$$

Vyjádříme si součet prvních $m + n$ členů $s_{m+n} = \frac{m+n}{2} (2a_1 + d(m+n-1))$ a ze vztahu (5) dosadíme za $2a_1$, tedy

$$s_{m+n} = \frac{m+n}{2} (-d(m+n-1) + d(m+n-1)) = 0.$$

Závěr. Součet prvních $m + n$ členů této posloupnosti se rovná 0.

Metodické poznámky

Je možné, že studenti poměrně rychle najdou výsledek na základě úvahy, protože podle zadání součet $(n+1)$ -ního členu až m -tého členu posloupnosti musí být nula, bude tedy tvořen dvojicemi navzájem opačných čísel. Posloupnost musí být klesající a tedy posledních n členů jsou čísla opačná k prvním n členům posloupnosti (např. 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7, pro $n = 2$, $m = 6$). Přesto je vhodné nechat studenty zapsat obecný postup řešení.

Zdroj: archiv autora – příklady 1, 2; příklad č. 3 byl v roce 1990 maturitním příkladem č. 4b v písemné maturitní zkoušce z matematiky pro třídy gymnázií se zaměřením oboru 01–Matematika

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: geometrická posloupnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi členy geometrické posloupnosti, řešení exponenciálních rovnic

Kolika způsoby lze mezi čísla 1 a 4 096 vložit několik přirozených čísel, abychom získali členy geometrické posloupnosti?

Řešení

Označme $a_1 = 1$ a $a_n = 4\,096$. Jsou-li všechny členy posloupnosti přirozené, je také kvocient přirozené číslo. Proto

$$a_n : a_1 = q^{n-1} = 4\,096 = 2^{12}.$$

Kvocient je proto mocninou čísla 2 a číslo $n - 1$ je dělitelem čísla 12, tj. jedním z čísel 1, 2, 3, 4, 6, nebo 12.

Je-li $n = 13$, pak je $q = 2$, je-li $n = 7$, pak je $q = 2^2 = 4$, je-li $n = 5$, pak je $q = 2^3 = 8$, je-li $n = 4$, pak je $q = 2^4 = 16$, je-li $n = 3$, pak je $q = 2^6 = 64$ a je-li $n = 2$, pak $q = 2^{12} = 4\,096$, v tomto případě však nevkládáme mezi krajní hodnoty žádné přirozené číslo. Celkově tak existuje 5 možností.

Závěr. Mezi daná čísla lze vložit několik přirozených čísel dle zadání úlohy 5 způsoby.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na vhodném vyjádření členů geometrické posloupnosti a řešení jednoduché exponenciální rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi členy geometrické posloupnosti, řešení exponenciálních rovnic, dělitelnost

Mezi čísla 1 a 4 096 bylo vloženo několik přirozených čísel tak, aby daná čísla (včetně čísel 1 a 4 096) tvořila členy geometrické posloupnosti, přičemž součet všech členů byl roven 4 369. Určete tato vložená čísla.

Řešení

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti je dán

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$
$$4\,369 = 1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^1 + 1,$$

odkud dostaneme rovnici

$$4\,368 = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^1 = q \cdot (q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q^1 + 1).$$

Číslo q je tedy dělitelem čísla $4\,368 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$. Je-li q sudé, je výraz v závorce lichý, proto jedinou možností je $q = 16k$. Protože $4\,096$ je mocninou čísla 2 , musí být q také mocninou čísla 2 . Jedinou možností je proto $q = 16$, odkud snadno dopočteme $n = 4$ a mezi krajní hodnoty vkládáme čísla 16 a 256 .

V případě lichého q by n -tý člen posloupnosti byl mocninou lichého přirozeného čísla, tímto číslem je ale $4\,096$. Pro liché q úloha nemá řešení.

Závěr. Mezi daná čísla je nutno vložit 16 a 256 .

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na dělitelnosti součtu příslušných členů geometrické posloupnosti. Vhodný dělitel musí být mocnina čísla 2 .

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi členy geometrické posloupnosti, exponenciální funkce

Určete nejmenší počet přirozených čísel, který lze vložit mezi čísla 1 a $4\,096$ tak, aby získané členy tvořily geometrickou posloupnost, přičemž jedním ze členů je číslo $128\sqrt{2}$.

Řešení

Podíl členů 1 a $128\sqrt{2}$ je roven $128\sqrt{2}$. Podíl členů $128\sqrt{2}$ a $4\,096$ je roven $16\sqrt{2}$. Hledaný kvocient musí být největším společným základem obou čísel $128\sqrt{2}$ a $16\sqrt{2}$, přičemž exponent je celočíselný. Protože

$$128\sqrt{2} = 2^7\sqrt{2} = \sqrt{2^{15}} = \sqrt{2^3}^5 \quad \text{a} \quad 16\sqrt{2} = 2^4\sqrt{2} = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^3}^3,$$

je společným největším společným základem čísel zřejmě $q = \sqrt{2^3}$. Mezi krajní hodnoty je třeba doplnit čísla $2\sqrt{2}$, 8 , $16\sqrt{2}$, 64 , $128\sqrt{2}$, 512 a $1\,024\sqrt{2}$.

Mezi daná čísla tak musíme vložit alespoň 7 čísel.

Závěr. Mezi daná čísla je třeba vložit alespoň 7 přirozených čísel.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je založeno na vhodném zápisu podílu příslušných členů geometrické posloupnosti.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: geometrická posloupnost, posloupnost zadaná rekurentně

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost, kvocient geometrické posloupnosti, počítání s odmocninami

Čísla $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$ jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Vypočítejte její následující člen.

Řešení

Označme x následující člen dané posloupnosti. Druhý člen posloupnosti je nenulový, kvocient této geometrické posloupnosti je tedy také nenulový a podíl jejích dvou po sobě jdoucích členů je konstantní, tedy platí

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{x}{\sqrt[6]{7}}.$$

Ověříme, že podíl prvních dvou a druhých dvou členů je stejný

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} &= 7^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 7^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}, \\ \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[3]{7}} &= 7^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}} = 7^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}.\end{aligned}$$

Kvocient této geometrické posloupnosti je tedy roven $\frac{1}{\sqrt[6]{7}}$ a platí

$$\frac{x}{\sqrt[6]{7}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}} \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Závěr. Následující člen dané geometrické posloupnosti je 1.

Metodické poznámky

V úloze využijeme kromě vlastností geometrické posloupnosti také počítání s odmocninami.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost, kvocient geometrické posloupnosti, řešení soustavy rovnic

Najděte všechna reálná čísla a , b tak, aby čísla a , 16, $\sqrt{b}$, a^2b tvořila (v tomto pořadí) geometrickou posloupnost.

Řešení

Kvocient geometrické posloupnosti je nenulový, podíl jejích dvou po sobě jdoucích členů je konstantní, platí tedy

$$\frac{16}{a} = \frac{\sqrt{b}}{16} = \frac{a^2 b}{\sqrt{b}}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Z rovnice $\frac{\sqrt{b}}{16} = \frac{a^2 b}{\sqrt{b}}$ po vynásobení společným jmenovatelem $16\sqrt{b}$ dostáváme $b = 16a^2 b$. Protože $b \neq 0$, je $a^2 = \frac{1}{16}$, tedy $a = \pm \frac{1}{4}$. Vzhledem k tomu, že druhý a třetí člen posloupnosti jsou kladná čísla ($a_2 = 16$, $a_3 = \sqrt{b} > 0$), je i kvocient této posloupnosti kladné číslo, a tedy i první člen musí být číslo kladné ($a_1 = a > 0$), tzn. $a = \frac{1}{4}$.

Z rovnice $\frac{16}{a} = \frac{\sqrt{b}}{16}$ po vynásobení společným jmenovatelem $16a$ dostáváme $a\sqrt{b} = 256$ a po dosazení $a = \frac{1}{4}$ je $\sqrt{b} = 1024$, tedy $b = 1\,048\,576$.

Metodické poznámky

V úloze využijeme vlastnosti geometrické posloupnosti.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: rekurentní zadání posloupnosti

Posloupnost $1, 1, 0, 1, -1, \dots$ splňuje následující podmínky. První dva členy a_1 a a_2 jsou rovny 1. Třetí člen je rozdílem předcházejících dvou členů, tj. $a_3 = a_1 - a_2$. Čtvrtý člen je součtem předcházejících dvou členů, tj. $a_4 = a_2 + a_3$. Dále $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$ atd. Najděte součet prvních 100 členů této posloupnosti.

Řešení

Určíme prvních několik členů zadané posloupnosti

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1, & a_8 = a_6 + a_7 = -1, \\ a_2 = 1, & a_9 = a_7 - a_8 = 0, \\ a_3 = 0, & a_{10} = a_8 + a_9 = -1, \\ a_4 = 1, & a_{11} = a_9 - a_{10} = 1, \\ a_5 = -1, & a_{12} = a_{10} + a_{11} = 0, \\ a_6 = 0, & a_{13} = a_{11} - a_{12} = 1, \\ a_7 = a_5 - a_6 = -1, & a_{14} = a_{12} + a_{13} = 1. \end{array}$$

Vidíme, že počínaje 13. členem posloupnosti se hodnoty opakují. Součet prvních dvanácti členů je roven 0 ($a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 0$), tedy součet $a_1 + a_2 + \dots + a_{96} = 0$ (96 je násobek čísla 12). Stačí určit členy a_{97} , a_{98} , a_{99} , a_{100} a jejich součet je zároveň součtem prvních 100 členů zadané posloupnosti. Vzhledem k tomu, že hodnoty členů posloupnosti se opakují, dostáváme

$$a_{97} = 1, \quad a_{98} = 1, \quad a_{99} = 0, \quad a_{100} = 1,$$

a součet

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100} = 3.$$

Metodické poznámky

Příklad, kde se jednotlivé členy posloupnosti počínaje určitým členem opakují, po tomto zjištění je určení součtu prvních 100 členů snadné.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rekurentní zadání posloupnosti, funkce, funkční hodnoty

Posloupnost reálných funkcí $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ vyhovuje pro každé reálné číslo x a všechna přirozená čísla n následujícím dvěma podmínkám

$$f_1(x) = x \quad \text{a} \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}.$$

Určete $f_{2011}(2011)$.

Řešení

Určíme prvních několik členů zadané posloupnosti funkcí

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x, \\ f_2(x) &= \frac{1}{1 - f_1(x)} = \frac{1}{1 - x}, \\ f_3(x) &= \frac{1}{1 - f_2(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = -\frac{1-x}{x}, \\ f_4(x) &= \frac{1}{1 - f_3(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1-x}{x}} = x = f_1(x). \end{aligned}$$

Vidíme, že počínaje čtvrtým členem se členy posloupnosti opakují, tedy

$$f_{2010}(x) = f_3(x) \quad (\text{protože } 2010 \text{ je násobek } 3).$$

Odtud pro všechna reálná čísla x platí

$$f_{2011}(x) = f_1(x) = x,$$

takže

$$f_{2011}(2011) = f_1(2011) = 2011.$$

Metodické poznámky

Žáci na střední škole počítají příklady s číselnými posloupnostmi, v této úloze se setkávají s posloupností funkcí.

Zdroj: zadání soutěže Matematický klokan 2010–2012, kategorie Student, Mathrace 2012, sada 1

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Macháčiková; machacikova@gymz1.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: průměrná rychlost

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: průměrná rychlost, harmonický průměr

Na vrchol hory vystupuje turista průměrnou rychlostí 3 km/h. Z vrcholu hory se turista vrací zpět stejnou cestou na původní místo průměrnou rychlostí 4,8 km/h. Jakou průměrnou rychlostí jde celou trasu?

Řešení

Označíme-li v_1 , t_1 a s rychlost, čas a dráhu výstupu, respektive v_2 , t_2 a s rychlost, čas a dráhu sestupu, pak $t_1 = s/v_1$, $t_2 = s/v_2$. Obě cesty, nahoru i dolů, turista jde průměrnou rychlostí

$$v = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{s \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4,8} \right)} = 3,7.$$

Závěr. Celou trasu turista jde průměrnou rychlostí 3,7 km/h.

Metodické poznámky

Vzorec

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)}$$

udává tzv. *harmonický průměr rychlostí* v_1 a v_2 . Můžeme si pamatovat, že harmonický průměr nějakých čísel je převrácený aritmetický průměr převrácených hodnot daných čísel. Průměrnou rychlost celého výletu lze tedy vypočítat jako harmonický průměr průměrných rychlostí výstupu a sestupu turisty.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: průměrná rychlost

Proti sobě vyjel z místa A v 10 hodin osobní automobil rychlostí 80 km/h, v 10:15 hodin vyjel z místa B nákladní automobil rychlostí 72 km/h. Mezi A , B je vzdálenost 96 km. V kolik a kde (od A) se auta setkají?

Řešení

Osobní automobil ujede za čas t hodin rychlostí v_1 km/h vzdálenost $s_1 = v_1 \cdot t$ km. Nákladní automobil vyjede o čtvrt hodiny později než osobní auto. Nákladní automobil

ujede za čas $(t - 1/4)$ hodin rychlostí v_2 km/h vzdálenost $s_2 = v_2(t - 1/4)$ km. Podle zadání úlohy platí

$$s_1 + s_2 = \text{vzdálenost mezi } A, B;$$

$$80t + 72\left(t - \frac{1}{4}\right) = 96.$$

Řešením této lineární rovnice o neznámé t dostaneme

$$t = 0,75 \text{ h} = 45 \text{ min} \quad \text{a} \quad s_1 = 0,75 \cdot 80 = 60 \text{ km}.$$

Závěr. Auta se setkají v 10 h 45 min ve vzdálenosti 60 km od místa A .

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: průměrná rychlost

Na kruhové dráze vyjeli z téhož místa A v témž okamžiku v opačných směrech dva cyklisté. Pomalejší, který jel rychlostí 6 m/s, potkal druhého cyklistu v prvním svém okruhu dvakrát, v druhém okruhu třikrát, v třetím okruhu zase dvakrát, přitom vždycky mimo místo A . Najděte co nejvyšší meze pro rychlost druhého cyklisty.

Řešení

Je-li t_k doba (měřená v sekundách od počátku jízdy), v které se oba cyklisté potkali po k -té, je

$$6t_k + vt_k = k \cdot s,$$

kde s je délka kruhové dráhy v metrech a v rychlost druhého cyklisty v m/s. Odtud

$$t_k = \frac{ks}{6+v}.$$

Protože $s/6$ je doba, za kterou projel pomalejší cyklista jednou kruhovou dráhu, pak podle textu úlohy

$$t_2 < \frac{s}{6} < t_3, \quad t_5 < \frac{2s}{6} < t_6, \quad t_7 < \frac{3s}{6} < t_8.$$

Dosadíme-li za t_k , $k = 2, 3, 5, 6, 7, 8$ dostaneme

$$\frac{2s}{6+v} < \frac{s}{6} < \frac{3s}{6+v}, \quad \frac{5s}{6+v} < \frac{2s}{6} < \frac{6s}{6+v}, \quad \frac{7s}{6+v} < \frac{3s}{6} < \frac{8s}{6+v}.$$

Odtud po úpravě

$$6 < v < 12, \quad 9 < v < 12, \quad 8 < v < 10.$$

takže $9 < v < 10$. Co nejvyšší meze pro rychlost druhého cyklisty jsou 9 a 10.

Závěr. Rychlost druhého cyklisty je mezi 9 a 10 m/s v celých číslech.

Metodické poznámky

Úloha je velmi náročná. Vyžaduje abstraktní myšlení. Na druhé straně jde o praktickou záležitost. Pracuje se s odhady.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: procento, geometrická posloupnost, součet prvních n členů geometrické posloupnosti, termínovaný vklad, úrok, daň z úroků, úroková míra, úrokovací období

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: procenta

Paní Benešová uložila do banky na termínovaný vklad částku 100 000 Kč na jeden měsíc. Úrok činí 2,4 % p.a. Pokud paní Benešová vklad neukončí, bude se automaticky znovu obnovovat (tzv. revolving). Úročit se ale bude jenom vložená částka 100 000 Kč. Daň z úroku je 15 %. Kolik Kč připíše banka po pravidelném opakování za půl roku?

Řešení

Zkratka p. a. (per annum) znamená, že úroková míra se vztahuje na jeden rok. Na jeden měsíc je úroková míra $2,4 \cdot \frac{1}{12} \%$. Za jeden měsíc banka připíše $100\,000 \cdot 0,024 \cdot \frac{1}{12}$ Kč, ale 15 % je daň z úroků, takže ve skutečnosti připíše $100\,000 \cdot 0,024 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,85 = 170$ Kč. Za půl roku je to $170 \cdot 6 = 1\,020$ Kč.

Závěr. Po půl roce připíše banka 1020 Kč.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procenta, mocniny

Pan Horník uložil do banky na termínovaný vklad na pět let s revolvingem částku 50 000 Kč. Banka úročí čtvrtletně, úrok činí 2,35 % p. a., daň z úroku je 15 %. Kolik korun mu po pěti letech banka vyplatí?

Řešení

Úrok 2,35 % se vztahuje na jeden rok, na čtvrt roku je $\frac{2,35}{4} \%$. Po 1. čtvrtroce banka připíše $50\,000 \cdot \frac{0,0235}{4}$ Kč, ale 15 % je daň z úroků, takže ve skutečnosti připíše $50\,000 \cdot \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85$ Kč, takže na účtu bude

$$50\,000 + 50\,000 \cdot \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85 = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85\right).$$

Po 2. čtvrtroce bude na účtu

$$\begin{aligned} & 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85\right) + 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85\right) \cdot \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85 = \\ & = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85\right) \cdot \left(1 + \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85\right) = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85\right)^2. \end{aligned}$$

Úročení se bude opakovat dvacetkrát ($5 \cdot 4$ čtvrtletí). Po 20. čtvrtroce bude na termínovaném vkladu

$$50000 \left(1 + \frac{0,0235}{4} \cdot 0,85 \right)^{20} = 55238 \text{ Kč.}$$

Závěr. Po pěti letech banka vyplatí panu Horníkovi 55 238 Kč.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: procenta, součet prvních n členů geometrické posloupnosti

Paní Trefná si založila od ledna spořicí účet a posílá na něj z běžného účtu každý měsíc 2 000 Kč. Banka úročí čtvrtletně úrokem ve výši 1,5 % p. a., daň z úroků je 15 %. Kolik Kč bude mít paní Trefná na účtu za dva roky? Je tento bankovní produkt pro paní Trefnou výhodný?

Řešení

1,5 % je roční úroková míra, úrok za čtvrt roku činí $1,5 \cdot \frac{1}{4} \%$. Úrokování proběhne celkem osmkrát ($2 \cdot 4 = 8$).

Po 1. čtvrtroce banka připíše $6000 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{4}$ Kč, ale 15 % je daň z úroků, takže ve skutečnosti připíše $6000 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85$ Kč. Na účtu tedy bude

$$6000 + 6000 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85 = 6000 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85) \text{ Kč.}$$

Po 2. čtvrtroce přijde dalších 6000 Kč a banka opět provede úrokování

$$\begin{aligned} & [6000 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85) + 6000] \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85) = \\ & = 6000 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85)^2 + 6000 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85) \text{ Kč.} \end{aligned}$$

Atd., až po 8. čtvrtroce

$$\begin{aligned} & 6000 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85)^8 + 6000 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85)^7 + \dots + 6000 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85) = \\ & = 6000 \cdot \left[(1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85)^8 + (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85)^7 + \dots + (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85) \right] \text{ Kč.} \end{aligned}$$

Členy v závorce tvoří 8 členů geometrické posloupnosti, kterou sečteme podle vzorce pro součet geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, přitom $a_1 = (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85)$ a $q = (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85)$

$$\text{Naspořená částka je } 6000 \cdot (1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85) \cdot \frac{(1 + 0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85)^8 - 1}{0,015 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0,85} = 48\,694 \text{ Kč.}$$

Závěr. Paní Trefná bude mít za dva roky na účtu 48 694 Kč. Tento bankovní produkt není příliš výhodný, protože úroková míra je nižší než inflace, takže peníze ztrácejí svoji hodnotu.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: procenta, součet prvních n členů geometrické posloupnosti, výpočet rovnice

Pan Burian si založil rentový účet s úrokovou mírou 2 % p. a. a bude spořit 2 200 Kč měsíčně po dobu 20 let. Po dobu 10 let pak bude pobírat měsíční rentu. Úrokovací období banky je jeden měsíc. Daň z úroků je 15 %.

- a) Kolik korun pan Burian celkem naspoří?
- b) Jaká je výše měsíční renty?
- c) Kolik korun bude panu Burianovi celkem vyplaceno?

Řešení

- a) Úročení proběhne 240krát ($20 \cdot 12 = 240$).

Po 1. měsíci bude na účtu

$$2200 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right) \text{ Kč.}$$

Po 2. měsíci bude na účtu

$$\begin{aligned} & \left[2200 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right) + 2200(\text{nový vklad})\right] \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right) = \\ & = 2200 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^2 + 2200 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right) \text{ Kč.} \end{aligned}$$

Po 240. měsíci bude na účtu

$$2200 \cdot \left[\left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{240} + \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{239} + \dots + \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right) \right] \text{ Kč.}$$

Členy v závorce tvoří 240 členů geometrické posloupnosti, kterou sečteme podle vzorce pro součet geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$, kde $a_1 = \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)$ a $q = \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)$.

Celková částka tedy je

$$2200 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right) \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{240} - 1}{0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}} = 629225 \text{ Kč.}$$

- b) Představme si, že ve výběrové fázi klient měsíční rentu, jejíž výši označíme r , nechává v bance jako produkt ke spoření po dobu 10 let. Na konci bude mít naspořenou částku $r \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120} - 1}{0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}}$ Kč. Tato částka je stejná jako částka, na kterou by vzrostl vklad 629 225 Kč za 10 let, tj. $629225 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120}$ Kč.

$$\text{Odtud dostáváme rovnici } 629225 \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120} = r \cdot \frac{\left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120} - 1}{0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}}.$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{629225 \cdot 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120}}{\left(1 + 0,85 \cdot 0,02 \cdot \frac{1}{12}\right)^{120} - 1} \\ r &= 5706 \text{ Kč} \quad (\text{přesná hodnota je } 5705,569048) \end{aligned}$$

c) $5705,569048 \cdot 120 \text{ měsíců} = 684\,668,2858 \text{ Kč}$

Závěr. Pan Burian naspoří částku 629 225 Kč, výše měsíční renty bude 5 706 Kč a celková vyplacená částka bude 684 668 Kč.

Metodické poznámky

První úloha slouží pro dokreslení základních pojmů, vyžaduje pouze znalost počítání s procenty. Druhá úloha rozšiřuje první úlohu o kapitalizaci úroků. Před řešením úlohy je třeba vysvětlit rozdíl mezi první a druhou úlohou a potom provést výpočet. Úloha tři a čtyři se více přibližuje realitě. Je opět nutné vysvětlení pojmů z finančního prostředí a také rozdíl v zadání obou úloh. Kromě procent je nutné použít znalost součtu prvních n členů geometrické posloupnosti. V závěru není důležitý jen výpočet, ale jeho součástí je také rozbor výsledků a porovnání se znehodnocení peněz inflací. Úlohy lze řešit bez znalosti vzorce pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti užitím tabulkového procesoru, např. programem Excel.

Zdroj: archiv autora,

Odvárko, O.: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, učebnice pro střední školy, 1. vyd., Praha: Prometheus, 2005.

Obrazový materiál:

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: geometrická posloupnost

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost, procenta

Pan Pilný uložil na začátku roku 25 000 Kč. Banka mu garantuje po dobu 5 let neměnný čistý roční úrok 1 % (po zdanění 15 %).

- Jakou částku bude mít pan Pilný na účtu na konci pátého roku, jestliže nevybere ani neuloží žádné další peníze a úrok si nechá vždy na konci roku připsat na účet?
- Kolik za tuto dobu zaplatí banka na úrocích?

Řešení

Jedná se o složené úrokování. Počáteční vklad $I_0 = 25\,000$ Kč.

Na konci prvního roku se navýší částka o 1 % z 25 000 Kč, tj. o 250 Kč, tedy

$$I_1 = I_0 + I_0 \cdot 0,01 = I_0 \cdot 1,01;$$

Na konci druhého roku se částka 25 250 Kč opět navýší o 1 %, tedy o 252,50 Kč,

$$I_2 = I_1 \cdot 1,01 = I_0 \cdot 1,01^2,$$

na konci každého dalšího roku se zvýší částka oproti roku předcházejícímu o 1 %, tedy 1,01krát. Částky na konci roku tvoří geometrickou posloupnost s prvním členem I_1 a kvocientem $q = 1,01$. I_5 je pátý člen této posloupnosti

$$I_5 = I_1 \cdot q^4 = I_0 \cdot q \cdot q^4,$$

po dosazení $25\,000 \cdot 1,01^5 = 26\,275$.

Na konci pátého roku bude na účtu 26 275 Kč, tedy čistý úrok za celou dobu bude 1 275 Kč, což je částka po odečtení 15 % daně (85 % z částky, kterou zaplatí banka na úrocích), 100 % částky je

$$\frac{1275 \text{ Kč}}{0,85} = 1500 \text{ Kč}.$$

Závěr. Pan Pilný bude mít na konci pátého roku na účtu 26 275 Kč, banka zaplatí na úrocích 1 500 Kč.

Metodické poznámky

Úloha tzv. finanční matematiky je jednoduchým příkladem na užití geometrické posloupnosti.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost, složené úrokování

Pan Šťastný vyhrál jistý obnos. Rozhodl se, že jej daruje svému právě narozenému synovi. Proto na začátku roku uložil výhru do banky. Jaký neměnný roční úrok (s přesností na setiny) by musela banka vyplácet, aby se nejpozději na konci 20. roku po vložení peněz, jeho vklad zdvojnásobil? (Daň z úroku je 15 %)

Řešení

Částka na konci dvacátého roku je dvojnásobkem původní částky, tedy $I_{20} = 2I_0$ a zároveň $I_{20} = I_0 \cdot q^{20}$, kde I_{20} je 20. člen posloupnosti s prvním členem $I_1 = I_0 \cdot q$ a kvocientem

$$q = 1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85,$$

tedy

$$2 = \left(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85\right)^{20} \Rightarrow p = \frac{(\sqrt[20]{2} - 1) 100}{0,85} \doteq 4,15.$$

Závěr. Banka by musela nabízet úrok 4,15 %.

Metodické poznámky

Na základě úlohy je možno rozpoutat diskusi nad aktuálními úroky, které nabízejí jednotlivé banky, popř. zadat úkol zjistit tyto úroky a využít je k sestavení a řešení dalších úloh.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: geometrická posloupnost – součet prvních n členů, exponenciální rovnice, logaritmus

Pan Spořivý na začátku každého měsíce posílá do banky 2 000 Kč. Banka nabízí roční úrok 1,5 %. Daň z úroku je 15 %. Úroky jsou připisovány na konci každého měsíce. Za jak dlouho bude mít naspořeno 100 000 Kč? (Peníze si chce vybrat na konci měsíce po připsání úroku.)

Řešení

Výsledná částka je součtem geometrické posloupnosti částek na konci jednotlivých měsíců. Čistý měsíční úrok je

$$\frac{0,015 \cdot 0,85}{12} = 0,0010625.$$

Počáteční vklad $I_0 = 2\,000$ Kč bude úročen n -krát, vzroste tak na $2\,000 \cdot 1,0010625^n$ Kč. Další člen bude úročen již jen $(n - 1)$ -krát, poslední pak pouze jedenkrát.

Jednotlivé měsíční vklady po příslušném zúročení tvoří geometrickou posloupnost. Výsledná částka bude jejich součtem. Platí tedy

$$100000 = 2000 \cdot 1,0010625 \cdot \frac{1,0010625^n - 1}{0,0010625},$$

odkud

$$\frac{0,053125}{1,0010625} + 1 = 1,0010625^n.$$

Exponenciální rovnici lze řešit logaritmováním

$$n \cdot \log 1,0010625 = \log \left(\frac{0,053125}{1,0010625} + 1 \right) \Rightarrow n \doteq 48,7.$$

Závěr. Pan Spořivý si může částku 100 000 Kč vybrat na konci 49. měsíce, který uplyne od začátku spoření.

Metodické poznámky

Úloha ukazuje nejen užití posloupností ve finanční matematice, ale i řešení jednoduché exponenciální rovnice logaritmováním (s využitím kalkulačky k výpočtu logaritmů).

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz