

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Geometrie

Typ úloh: Různé metody řešení



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	7
Metodický list 3	10
Metodický list 4	16
Metodický list 5	19
Metodický list 6	22
Metodický list 7	24
Metodický list 8	28
Metodický list 9	31
Metodický list 10	34
Metodický list 11	37
Metodický list 12	40
Metodický list 13	44
Metodický list 14	48
Metodický list 15	50
Metodický list 16	56
Metodický list 17	59
Metodický list 18	63
Metodický list 19	67
Metodický list 20	70
Metodický list 21	73
Metodický list 22	76
Metodický list 23	80
Metodický list 24	83
Metodický list 25	85
Metodický list 26	88
Metodický list 27	93
Metodický list 28	95
Metodický list 29	99
Metodický list 30	102
Metodický list 31	104
Metodický list 32	110
Metodický list 33	114
Metodický list 34	117
Metodický list 35	121

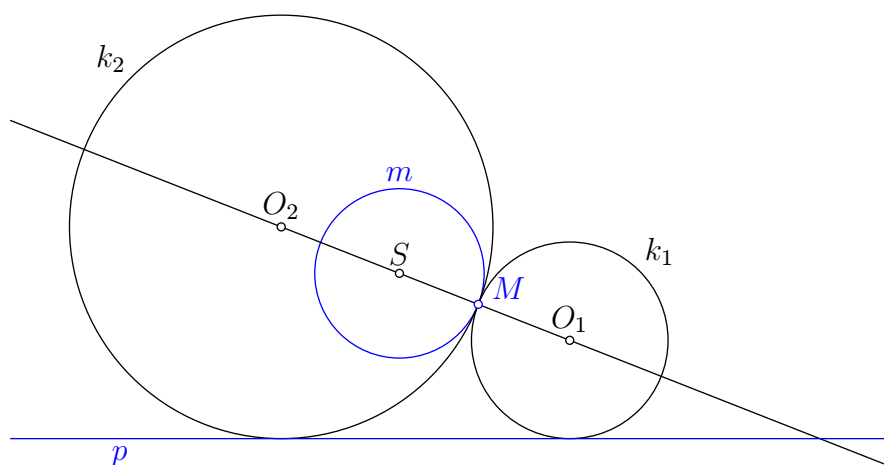
Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: kružnice, tečna, podobné trojúhelníky, stejnoolehlost

Úloha

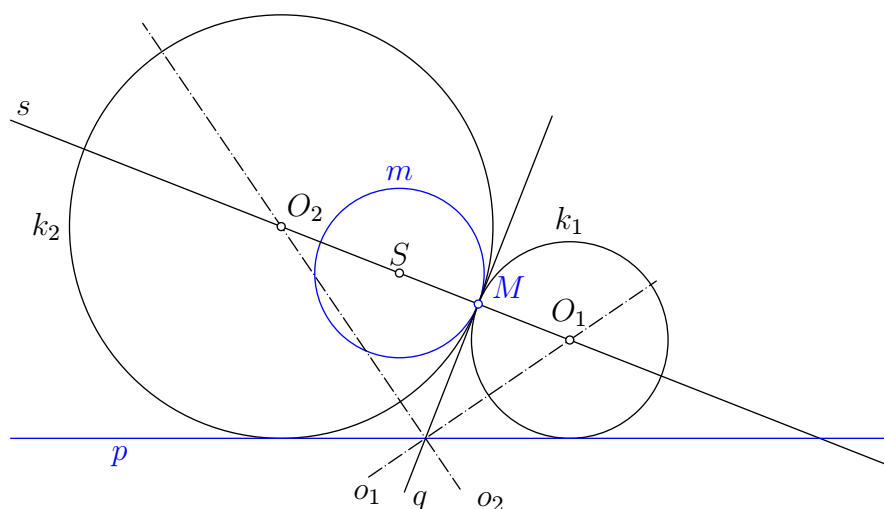
Sestrojte všechny kružnice k , které se dotýkají dané kružnice m v jejím bodě M a současně přímky p , která není tečnou kružnice m .



Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: tečna kružnice, dotyk kružnic

Kružnice k se dotýká kružnice m v bodě M právě tehdy, má-li s kružnicí m v bodě M společnou tečnu. Odtud plyne konstrukce.



Obr. 1: Konstrukce pomocí společné tečny

Postup konstrukce

1. Sestrojíme tečnu q dané kružnice m v daném bodě M a řešíme místo původní úlohy úlohu: Sestrojte všechny kružnice k , které se dotýkají dané přímky q v daném bodě M a dané přímky p , která je různá od q .
 - Předpokládejme nejprve, že přímky p, q nejsou rovnoběžné. Středů kružnic, které se dotýkají obou z nich, leží na osách souměrnosti o_1, o_2 dvojice přímek p, q (na osách úhlů sevřených přímkami).
 - Jsou-li přímky p, q rovnoběžné, potom středů kružnic, které se dotýkají obou z nich, leží na ose o pásu omezeného rovnoběžkami p a q .
2. Sestrojíme kolmici s k přímce q procházející bodem S . Na s leží středů kružnic, které se dotýkají přímky q v jejím bodě M .
3. Sestrojíme středů hledaných kružnic O_1, O_2 , případně O jako průsečíky přímky s a os souměrnosti o_1, o_2 , případně o , viz obr. 1.

Závěr. Jsou-li p, q různoběžné, má úloha 2 různá řešení. Jsou-li p, q rovnoběžné, má úloha 1 řešení. Přitom p a q budou rovnoběžné, právě když přímka SM bude kolmá k přímce p .

Metodické poznámky

První z uvedených řešení vyžaduje uvědomit si, že dotýkající se kružnice mají v bodě dotyku společnou tečnu, a řešit následně jednodušší (známou) úlohu.

Řešení 2 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: tečna kružnice, dotyk kružnic, množiny bodů dané vlastnosti

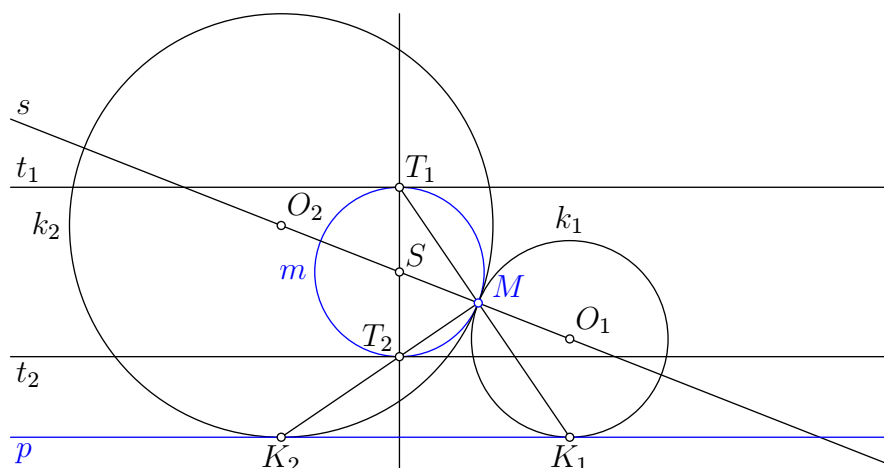
Středů kružnic, které se dotýkají kružnice m v bodě M , leží na přímce SM (mimo bod M), kde S je střed kružnice m . Bod K dotyku hledané kružnice k s přímkou p leží na kolmici vedené středem O hledané kružnice k dané přímce p . Přitom platí $|OM| = |OK|$.

Pro všechny body P přímky $s = SM$ sestrojíme vrchol Q (a Q' na polopřímce opačné k PQ) rovnoramenného trojúhelníku MPQ , kde $|MP| = |PQ|$ a PQ je kolmá k p . Tyto trojúhelníky tvoří dvě sady (v každé sadě navzájem podobných) rovnoramenných trojúhelníků, a tudíž platí, že všechny body Q leží na dvou (navzájem kolmých) přímkách procházejících daným bodem M .

V tomto postupu řešení budeme konstruovat body dotyku K_1, K_2 hledaných kružnic k s danou přímkou p .

Postup konstrukce

1. Sestrojíme přímku $s = SM$, na níž leží středů kružnic, které se dotýkají kružnice m v jejím bodě M .
2. Sestrojíme jeden rovnoramenný trojúhelník MPQ , kde P je bodem přímky s , $|MP| = |PQ|$ a PQ je kolmá k p .
3. Sestrojíme přímku $b_1 = MQ$ a bodem M přímku b_2 k ní kolmou.



Obr. 3: Konstrukce pomocí stejnolehlosti

T_1, T_2 s kružnicí m jsou vzory bodů dotyku výsledné kružnice (kružnic k_1, k_2) s danou přímkou p . Body dotyku K_1, K_2 proto leží na přímkách MT_1, MT_2 .

Popis konstrukce

1. Sestrojíme přímkou $s = SM$, na níž leží středy kružnic, které se dotýkají kružnice m v jejím bodě M .
2. Sestrojíme body dotyku T_1, T_2 tečen t_1, t_2 kružnice m , které jsou rovnoběžné s danou přímkou p (body dotyku T_1, T_2 jsou průsečíky kružnice m a kolmice k přímce p vedené bodem S).
3. Sestrojíme přímky MT_1, MT_2 .
4. Dále uvažujeme dva případy:
 - a) Předpokládejme nejprve, že přímky p, SM nejsou kolmé. Body dotyku K_1, K_2 hledaných kružnic jsou průsečíky přímek MT_1, MT_2 s danou přímkou p .
 - b) Jsou-li přímky p, SM kolmé, potom je jeden z bodů dotyku T_1, T_2 totožný s daným bodem M a existuje jediná výsledná kružnice k .
5. Středy hledaných kružnic O_1 a O_2 jsou pak průsečíky přímky s a kolmic k přímce p procházejících po řadě body K_1, K_2 .

Metodické poznámky

Třetí z uvedených řešení se uvádí v učebnicích jako aplikace stejnolehlosti v řešení konstrukčních úloh o kružnicích.

Zdroj: archiv autora, autor

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.; sarka@gbn.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: stejnolehlost, podobnost, vzdálenost bodů v rovině, vzdálenost bodu od přímky

Úloha

Do pravoúhlého trojúhelníku ABC s odvěsnami $b = |AC| = 111$ mm, $a = |BC| = 148$ mm je vepsán čtverec $KLMN$ tak, že vrcholy K, L leží na úsečce AB , bod M náleží úsečce BC a bod N náleží úsečce AC (obr. 1). Určete délku d strany čtverce $KLMN$.

Řešení 1 (úroveň 1)

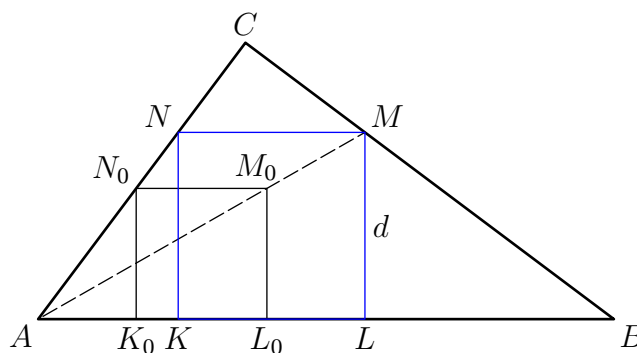
Předpokládané znalosti: stejnolehlost

Délku strany čtverce zjistíme geometrickou konstrukcí užitím stejnolehlosti (obr. 1). Sestrojíme libovolný pomocný čtverec $K_0L_0M_0N_0$ tak, že jeho strana K_0L_0 leží na úsečce AB a bod N_0 na úsečce AC .

Hledaný čtverec $KLMN$ je obraz čtverce $K_0L_0M_0N_0$ ve stejnolehlosti se středem A .

Bod M je průsečík polopřímky AM_0 a úsečky BC . Vrcholy K, L, N leží na rovnoběžkách se stranami pomocného čtverce $K_0L_0M_0N_0$ a na příslušných stranách trojúhelníku ABC .

Měřením lze zjistit, že délka strany čtverce $KLMN$ je $d = 60$ mm.



Obr. 1

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: podobnost trojúhelníků

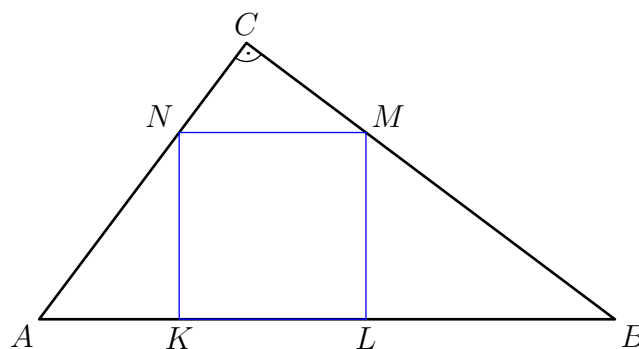
Délku strany čtverce zjistíme výpočtem s využitím podobnosti trojúhelníků (obr. 2).

$$b = |AC| = 37 \cdot 3 = 111 \text{ mm},$$

$$a = |BC| = 37 \cdot 4 = 148 \text{ mm}.$$

To znamená, že pravoúhlý trojúhelník ABC má strany v poměru $3 : 4 : 5$. Bez použití Pythagorovy věty pak zjistíme délku přepony c .

$$c = |AB| = 37 \cdot 5 = 185 \text{ mm}$$



Obr. 2

Trojúhelníky ABC , ANK , NMC a MBL jsou podobné podle věty uu . Délky jejich stran jsou v poměru $3 : 4 : 5$. Vyjádříme si délky úseček AN , CN (obr. 2) pomocí délky strany d čtverce $KLMN$. Z trojúhelníku ANK plyne $|AN| = \frac{5}{4}d$, z trojúhelníku NMC plyne $|CN| = \frac{3}{5}d$.

Sestavíme rovnici s neznámou d .

$$|AN| + |CN| = |AC|,$$

$$\frac{5}{4}d + \frac{3}{5}d = 111,$$

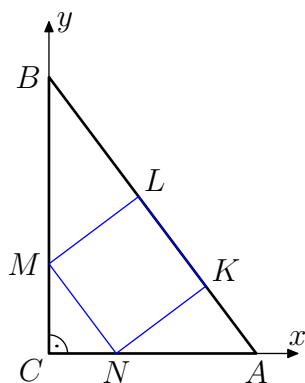
$$d = 60.$$

Opět docházíme k závěru, že délka strany d čtverce $KLMN$ je 60 mm.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie v rovině – metrické úlohy

Pravoúhlý trojúhelník ABC umístíme do pravoúhlé soustavy souřadnic v rovině, kde $C[0;0]$, $A[111;0]$, $B[0;148]$ (obr. 3).



Obr. 3

- a) Určíme obecnou rovnici přímky AB . Její směrový vektor je $\mathbf{u} = A - B = (111; -148)$, její normálový vektor je $\mathbf{n} = (148; 111)$. Přímka AB dále prochází bodem $A[111;0]$.

$$ax + by + c = 0,$$

$$148 \cdot 111 + 111 \cdot 0 + c = 0,$$

$$c = -16428.$$

- Obecná rovnice přímky AB je $148x + 111y - 16428 = 0$, po úpravě $4x + 3y - 444 = 0$.
- b) Body M, N jsou dány svými souřadnicemi $M[0; y]$, $N[x; 0]$. Přímky AB, MN jsou rovnoběžné. Proto platí $(A - B) = k \cdot (N - M)$, po dosazení $(111; -148) = k \cdot (x - y)$, kde $k > 1$. Odtud dostáváme $x = \frac{111}{k}$, $y = \frac{148}{k}$. Body M, N mají souřadnice $M[0; \frac{148}{k}]$, $N[\frac{111}{k}; 0]$.
- c) Určíme velikost úsečky MN .

$$|MN| = d = \sqrt{\left(\frac{111}{k}\right)^2 + \left(\frac{148}{k}\right)^2} = \frac{185}{k}.$$

- d) Určíme vzdálenost d bodu M od přímky AB .

$$|ML| = d = \frac{\left|40 + 3\frac{148}{k} - 444\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}},$$

po úpravě ($k > 1$) dostáváme

$$d = \frac{444k - 444}{5k}.$$

- e) Ze shodnosti úseček MN, ML plyne rovnice s neznámou k .

$$\frac{444k - 444}{5k} = \frac{185}{k}.$$

Řešením rovnice je $k = \frac{37}{12}$.

- f) $d = \frac{185}{k} = \frac{185}{\frac{37}{12}} = 60$.

Délka d strany čtverce $KLMN$ je 60 mm.

Metodické poznámky

V úloze jsou ukázány tři odlišné přístupy při hledání délky strany čtverce vepsaného do trojúhelníku. Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků (žáci budou schopni přijít na řešení 1, 2, 3) a následně diskutovat výhody a nevýhody zvoleného řešení. Na základě zkušeností autora lze očekávat, že největší problémy budou mít žáci s řešením 3.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: geometrie v rovině – konstrukční úlohy

Úloha

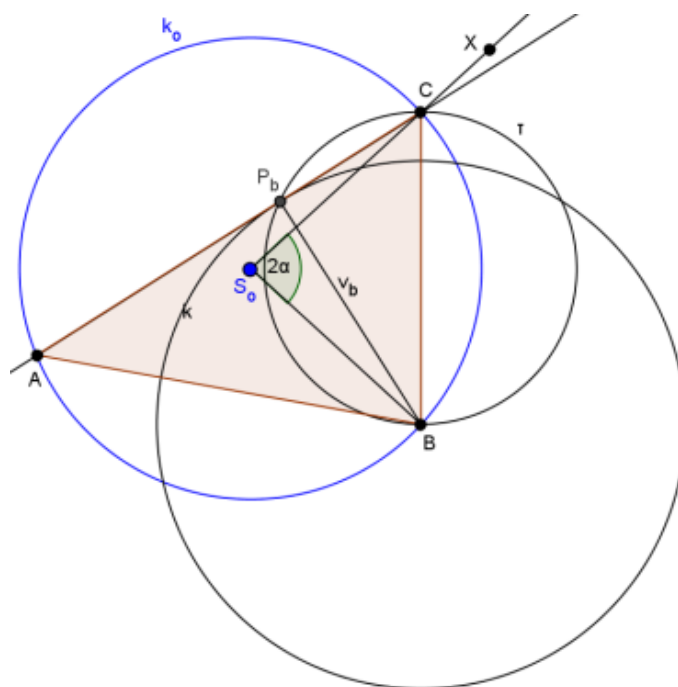
Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $\alpha = 45^\circ$, $v_b = 4\text{ cm}$, $r = 3\text{ cm}$.

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: trojúhelník a jeho prvky, konstrukční úloha a její části, množiny bodů dané vlastnosti, základní konstrukční dovednosti, geometrická symbolika pro zápis konstrukce

Úlohu začneme řešit umístěním kružnice k_o trojúhelníku opsané.

Rozbor. (obr. 1a) Body B a C sestrojíme využitím vlastností obvodových a středových úhlů $|\sphericalangle BS_oC| = 2\alpha$. Patu P_b výšky v_b sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice s průměrem BC , neboť úhel BP_bC je pravý. Zbývající vrchol trojúhelníku ABC , bod A , leží na kružnici opsané a na přímce CP_b .

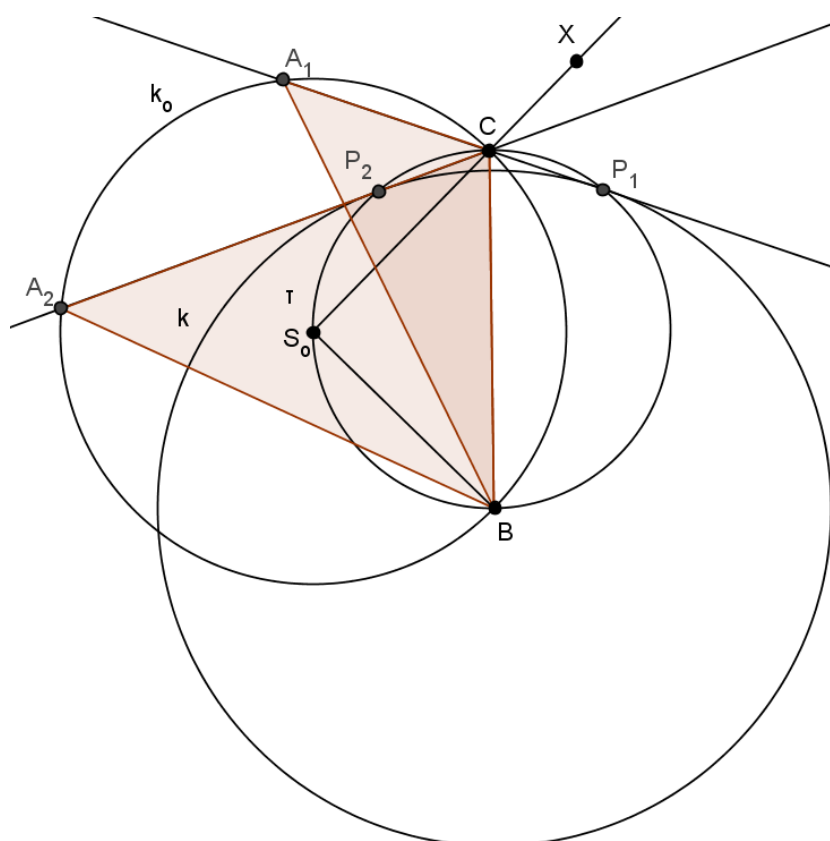


Obr. 1a

Zápis konstrukce.

1. k_o ; $k_o(S_o; r = 3 \text{ cm})$
2. B ; $B \in k_o$
3. $\sphericalangle BS_oX$; $|\sphericalangle BS_oX| = 2\alpha = 90^\circ$
4. C ; $C \in k_o \cap \leftrightarrow SX$
5. τ ; τ je Thaletova kružnice s průměrem BC
6. k ; $k(B; v_b = 4 \text{ cm})$
7. P_b ; $P_b \in \tau \cap k$
8. A ; $A \in k_o \cap \leftrightarrow CP_b$
9. $\triangle ABC$

Diskuse. (obr. 1b) I při tomto způsobu řešení jsou hledané trojúhelníky dva, neboť kružnice l a Thaletova kružnice τ_{BC} se protínají ve dvou bodech, tj. existují dva body P_b a tedy dva neshodné trojúhelníky ABC .



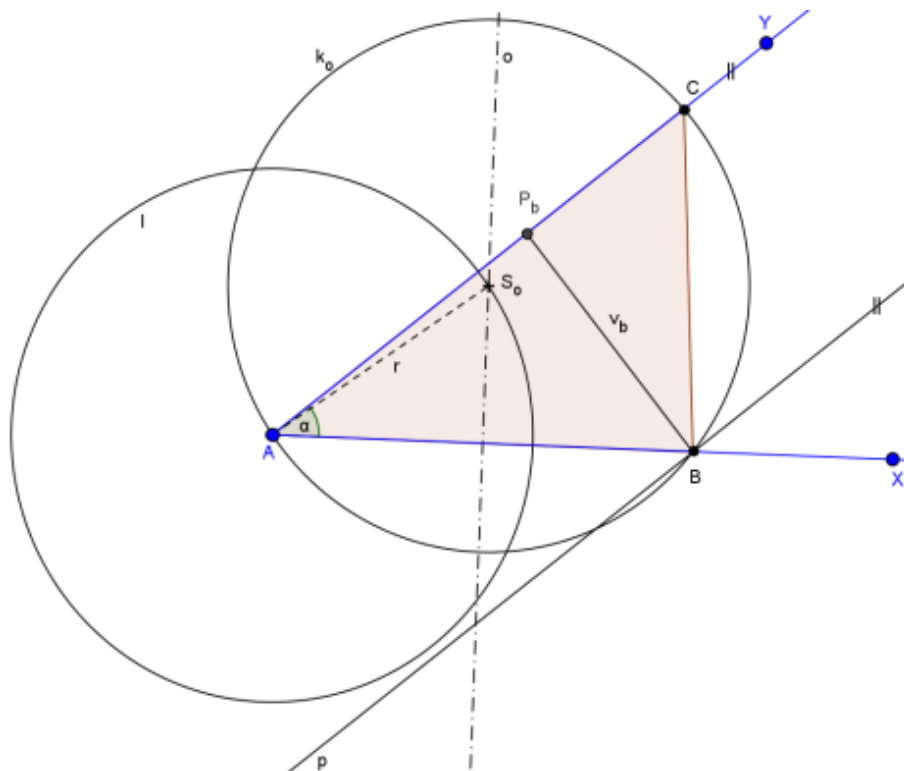
Obr. 1b

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: trojúhelník a jeho prvky; konstrukční úloha a její části, množiny bodů dané vlastnosti, základní konstrukční dovednosti, geometrická symbolika pro zápis konstrukce

Zvolme umístění úhlu α tj. úhel XAY o velikosti α .

Rozbor. (obr. 2a) Vrcholem úhlu o velikosti α je bod A . Bod B leží na jeho jednom rameni, např. polopřímce AX a od druhého ramene, tj. polopřímky AY , má vzdálenost v_b . Musí proto ležet na rovnoběžce s přímkou AY ve vzdálenosti v_b . Střed S_o opsané kružnice k_o leží na ose strany AB a od bodu A resp. B má vzdálenost r . Bod C leží na kružnici opsané a na polopřímce AY .

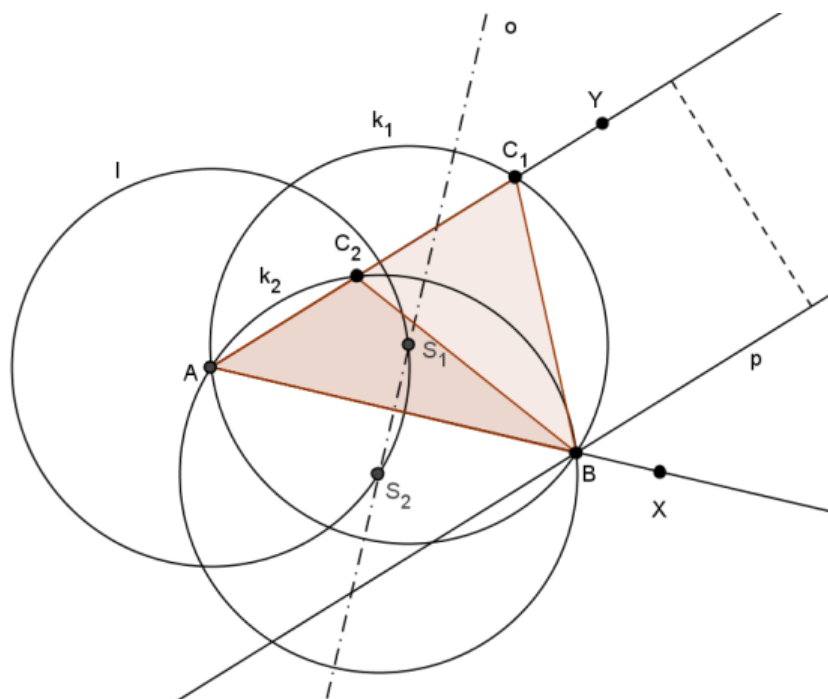


Obr. 2a

Zápis konstrukce.

1. $\sphericalangle XAY$; $|\sphericalangle XAY| = \alpha = 45^\circ$
2. p ; $p \parallel \leftrightarrow AY$, $|p \leftrightarrow AY| = v_b = 4 \text{ cm}$
3. B ; $B \in p \cap \mapsto AX$
4. o ; o je osa úsečky AB
5. l ; $l(A; r = 3 \text{ cm})$
6. S_o ; $S_o \in o_{AB} \cap l$
7. k_o ; $k_o(S_o; r = 3 \text{ cm})$
8. C ; $C \in k_o \cap \mapsto AY$
9. $\triangle ABC$

Diskuse. (obr. 2b) Úloha má při zvoleném zadání dvě řešení, protože existují dva průsečíky kružnice l a osy úsečky AB , tj. existují dva středy pro kružnici opsanou.



Obr. 2b

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: trojúhelník a jeho prvky, konstrukční úloha a její části; množiny bodů dané vlastnosti, základní konstrukční dovednosti, geometrická symbolika pro zápis konstrukce

Zvolme umístění výšky v_b , tj. úsečku BP_b o velikosti v_b .

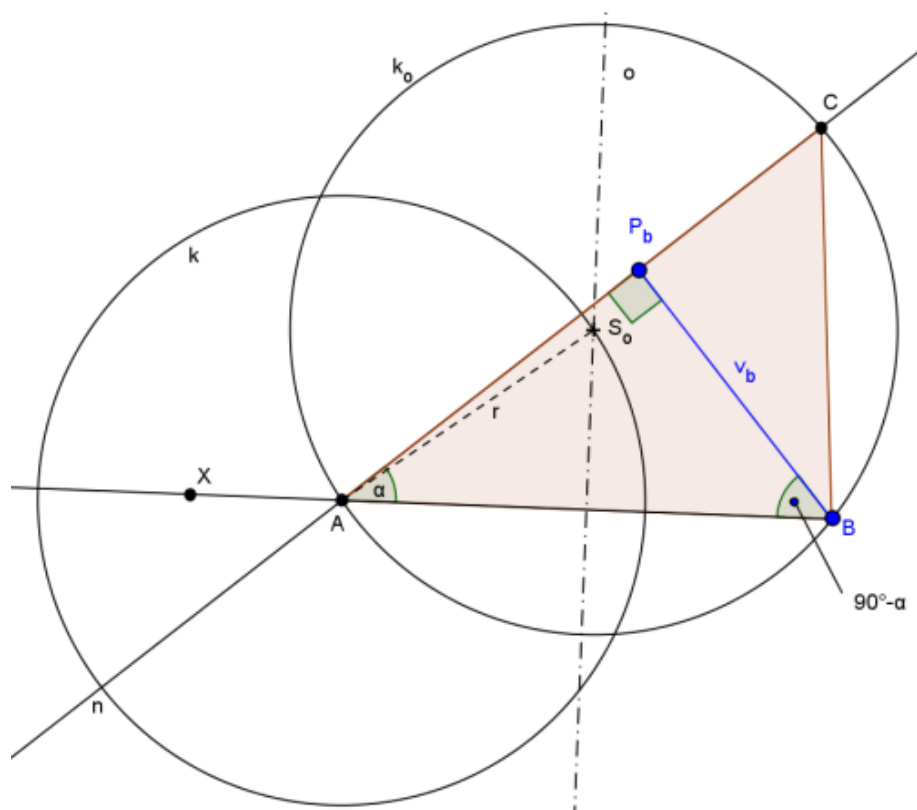
Rozbor (obr. 3a) Bod A je třetím vrcholem pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnou BP_b a ostrými úhly o velikosti α a $90^\circ - \alpha$. Další postup je stejný jako při umístění úhlu α . Střed S_o opsané kružnice k_o leží na ose strany AB a od bodu A resp. B má vzdálenost r , bod C leží na kružnici opsané a na přímce n .

Zápis konstrukce.

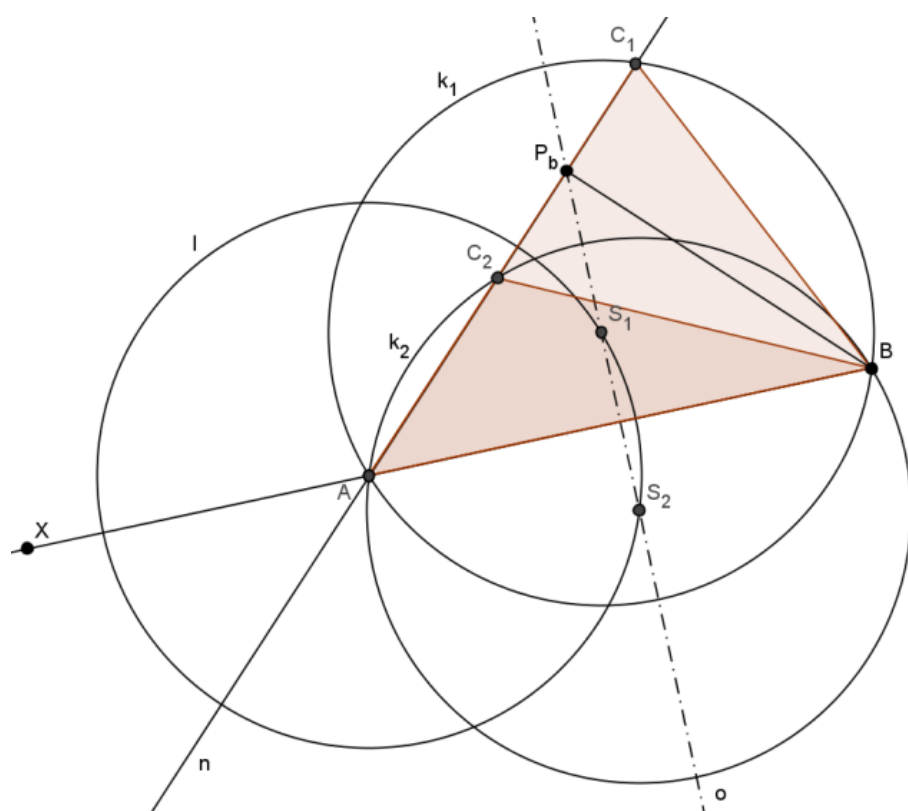
1. BP_b ; $|BP_b| = v_b = 4 \text{ cm}$
2. n ; $P_b \in n, n \perp BP_b$
3. $\sphericalangle P_bBX$; $|\sphericalangle P_bBX| = 90^\circ - \alpha = 45^\circ$
4. A ; $A \in n \cap \rightarrow BX$
5. o ; o je osa úsečky AB
6. l ; $l(A; r = 3 \text{ cm})$
7. S_o ; $S_o \in o \cap l$
8. k_o ; $k_o(S_o; r = 3 \text{ cm})$
9. C ; $C \in k_o \cap n$
10. $\triangle ABC$

Diskuse. (obr.3b)

Stejně jako v předcházejícím řešení existují dva průsečíky kružnice l a osy úsečky AB , tj. existují dva středy pro kružnici opsanou a úloha má tedy dvě řešení.



Obr. 3a



Obr. 3b

Metodické poznámky

Úloha je nepolohová, neboli musíme začít umístěním některého ze zadaných prvků. Výška určuje vzdálenost vrcholu od přímky obsahující protější stranu, a tudíž, je-li dána strana a výška na tuto stranu, leží zbývající vrchol na rovnoběžkách s touto stranou ve vzdálenosti výšky (řešení 2). Začínáme-li při řešení úlohy výškou, leží zbývající dva vrcholy, které výška neobsahuje, na kolmici k výšce vedené její patou (řešení 3). Ve srovnání s 2. způsobem řešení je 3. způsob konstrukčně méně náročný. Množinou vrcholů pravých úhlů nad danou úsečkou je Thaletova kružnice a to je možné využít při hledání paty výšky (řešení 1). Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků a následně diskutovat výhody a nevýhody zvoleného řešení.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Eva Pomykalová; eva.pomykalova@email.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: úhly v kružnici, shodné zobrazení (otočení), operace s vektory

Úloha

Dokažte, že spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodinek 1, 6 a 4, 9, jsou k sobě kolmé.

Úmluva. Body, které vyznačují na ciferníku čísla $1, 2, \dots, 12$, představují vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku $A_1A_2 \dots A_{12}$ o středu S . Máme dokázat, že jsou k sobě kolmé úsečky A_1A_6 a A_4A_9 .

Řešení 1 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obvodový a středový úhel, vlastnosti trojúhelníku

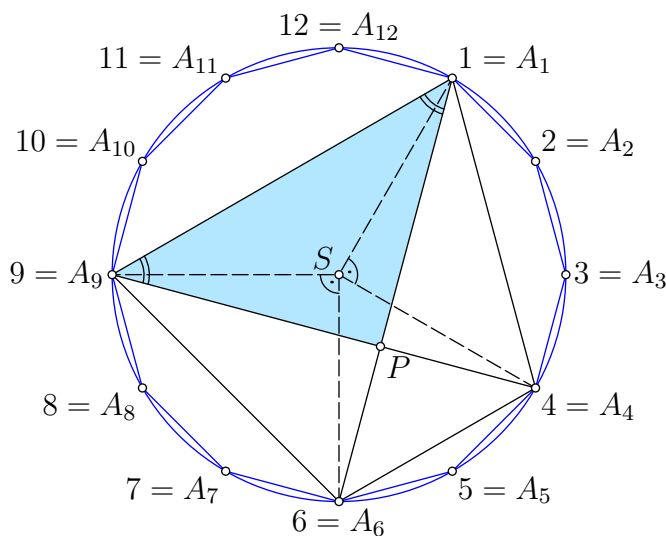
Označme P průsečík úseček A_1A_6 a A_4A_9 . V obr. 1 vidíme čtyři trojúhelníky

$$A_1PA_4, \quad A_4PA_6, \quad A_6PA_9, \quad A_1PA_9.$$

Uvažujme největší z nich, tj. trojúhelník A_1PA_9 . Pro velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A_1 platí

$$|\sphericalangle PA_1A_9| = |\sphericalangle A_6A_1A_9| = \frac{1}{2} |\sphericalangle A_6SA_9| = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ,$$

neboť úhel $A_6A_1A_9$ je obvodovým úhlem k menšímu kružnicovému oblouku $\widehat{A_6A_9}$ a jeho velikost je tudíž rovna polovině odpovídajícího středového úhlu A_6SA_9 .



Obr. 1

Podobně pro velikost vnitřního úhlu při vrcholu A_9 platí

$$|\sphericalangle PA_9A_1| = |\sphericalangle A_4A_9A_1| = \frac{1}{2} |\sphericalangle A_4SA_1| = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ,$$

neboť úhel $A_4A_9A_1$ je obvodovým úhlem k menšímu kružnicovému oblouku $\widehat{A_4A_1}$ a jeho velikost je tudíž rovna polovině odpovídajícího středového úhlu A_4SA_1 .

V každém trojúhelníku je součet velikostí vnitřních úhlů 180° , neboli v trojúhelníku A_1PA_9 je

$$|\sphericalangle A_1PA_9| = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ.$$

Řešení 2 (úroveň 2)

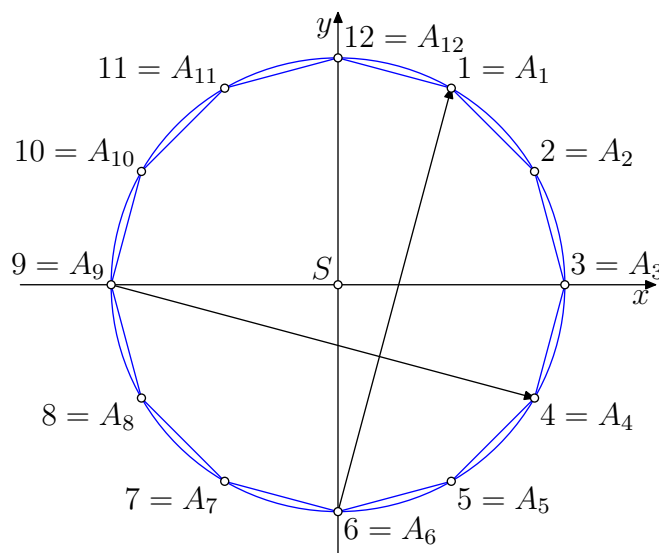
Předpokládané znalosti: otočení

Z obr. 1 je zřejmé, že úsečka A_1A_6 je obrazem úsečky A_4A_9 v otočení kolem středu S (středu ciferníku) o $+90^\circ$, resp. úsečka A_4A_9 je obrazem úsečky A_1A_6 v otočení kolem středu S o -90° . Odchylka sobě odpovídajících si přímek v otočení je určena úhlem otočení, tudíž odchylka přímek A_1A_6 a A_4A_9 je 90° .

Řešení 3 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: soustava souřadnic v rovině, jednotková kružnice, goniometrické funkce sinus a kosinus, skalární součin vektorů

Předpokládejme, že kružnice opsaná dvanáctiúhelníku $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ na obr. 2 představuje jednotkovou kružnici. Z definice goniometrických funkcí sinus a kosinus vyplývají



Obr. 2

souřadnice bodů A_1, A_4, A_6 a A_9

$$A_1 \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right], \quad A_4 \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} \right], \quad A_6 [0; -1], \quad A_9 [-1; 0].$$

Souřadnice vektorů $\overrightarrow{A_6A_1}$ a $\overrightarrow{A_9A_4}$ jsou

$$\overrightarrow{A_6A_1} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right), \quad \overrightarrow{A_9A_4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1; -\frac{1}{2} \right).$$

Skalární součin těchto vektorů je roven nule, neboť

$$\overrightarrow{A_6A_1} \cdot \overrightarrow{A_9A_4} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1; -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 0.$$

To znamená, že vektory $\overrightarrow{A_6A_1}$ a $\overrightarrow{A_9A_4}$ jsou k sobě kolmé.

Závěr. Spojnice bodů, které vyznačují na ciferníku hodinek 1, 6 a 4, 9 jsou k sobě kolmé.

Metodické poznámky

Jde o klasickou úlohu na procvičení učiva „úhly v kružnici“. Navazuje na jednodušší úlohy – určit velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, resp. čtyřúhelníku, kdy vrcholy trojúhelníku, resp. čtyřúhelníku jsou body ciferníku. Je třeba zdůraznit, že v dané úloze není úhel A_1PA_9 úhlem obvodovým, neboť jeho vrchol, bod P neleží na kružnici. Místo trojúhelníku A_1PA_9 je možné využít kterýkoli ze zbývajících tří trojúhelníků, tj. A_1PA_4 , A_4PA_6 , A_6PA_9 . Řešit úlohu druhým způsobem je možné až při probírání kapitoly Shodná zobrazení – jde o využití otočení v důkazových úlohách. Třetí způsob řešení je vhodné zařadit v rámci opakování a systemizace učiva v posledním ročníku.

K poslednímu řešení. Pokud bychom místo jednotkové kružnice zvolili kružnici o poloměru r , pak by souřadnice jak jednotlivých bodů, tak vektorů jimi určených, byly r -násobky souřadnic vyplývajících z jednotkové kružnice. Pokud $\overrightarrow{A_6A_1} \cdot \overrightarrow{A_9A_4} = 0$, pak také $r \cdot \overrightarrow{A_6A_1} \cdot r \cdot \overrightarrow{A_9A_4} = r^2 \cdot \overrightarrow{A_6A_1} \cdot \overrightarrow{A_9A_4} = 0$.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Eva Pomykalová; eva.pomykalova@email.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: trojúhelník, obsah trojúhelníku, shodná zobrazení, rovnice přímky

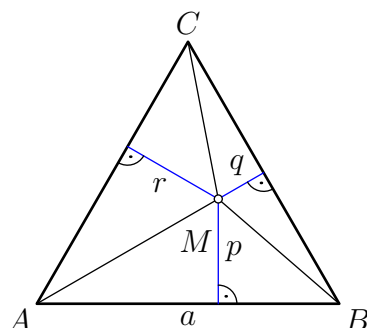
Úloha

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a uvnitř něho bod M . Dokažte, že součet vzdáleností bodu M od všech tří stran trojúhelníku je konstantní pro jakoukoli polohu tohoto bodu.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rovnostranný trojúhelník, vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku

Označme délku a strany rovnostranného trojúhelníku ABC . Jeho výška má pak velikost $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, takže jeho obsah je $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Obsah trojúhelníku ABC je také roven součtu obsahů trojúhelníků ABM , BCM a CAM . Jsou-li p , q , r vzdálenosti bodu M postupně od stran AB , BC , CA , je obsah trojúhelníku ABC roven $\frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}aq + \frac{1}{2}ar$.



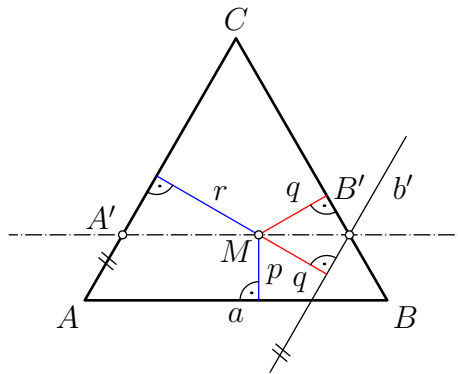
Porovnáním obou vztahů pro obsah trojúhelníku ABC dostaneme $\frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}aq + \frac{1}{2}ar = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, neboli $p + q + r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, což je konstanta pro daný trojúhelník s danou délkou strany a .

Závěr. Součet vzdáleností bodu M od všech tří stran trojúhelníku je konstantní pro jakoukoli polohu tohoto bodu.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rovnostranný trojúhelník, osová souměrnost

Označme p , q , r vzdálenosti bodu M postupně od stran AB , BC , CA . Bodem M sestrojíme rovnoběžku $A'B'$ se stranou AB podle obrázku.

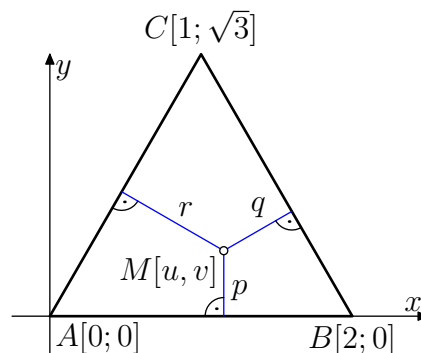


V osové souměrnosti s osou $A'B'$ přejde přímka BC v přímku b' . Vzdálenost bodu M od přímky b' je tedy také q . Součet délek $q + r$ je tudíž roven velikosti výšky trojúhelníku $A'B'C$. Součet $p + q + r$ je pak roven velikosti výšky trojúhelníku ABC , tedy je to konstantní hodnota.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rovnostranný trojúhelník, rovnice přímky, vzdálenost bodu od přímky

Trojúhelník ABC umístíme do soustavy souřadnic podle obrázku. Má-li délka strany velikost 2, je výška trojúhelníku rovna $\sqrt{3}$ (viz úloha 1). Označme souřadnice bodu M jako u a v , kde $v > 0$ a u takové, aby bod M ležel pod přímkami AC a BC .



Přímka AC má rovnici $y = \sqrt{3}x$, neboli $\sqrt{3}x - y = 0$. Souřadnice všech bodů $[x, y]$ ležících pod touto přímkou splňují nerovnost $y < \sqrt{3}x$, tedy pro souřadnice bodu M platí $v < \sqrt{3}u$. Vzdálenost bodu M od této přímky potom je

$$d(M, AC) = \frac{|\sqrt{3}u - v|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}u - v}{2}.$$

Přímka BC má rovnici $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$, neboli $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$. Souřadnice všech bodů $[x, y]$ ležících pod touto přímkou splňují nerovnost $y < -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$, tedy pro souřadnice bodu M platí $v < -\sqrt{3}u + 2\sqrt{3}$. Vzdálenost bodu M od této přímky potom je

$$d(M, BC) = \frac{|\sqrt{3}u + v - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{-(\sqrt{3}u + v - 2\sqrt{3})}{2} = \frac{-\sqrt{3}u - v + 2\sqrt{3}}{2}.$$

Potom je

$$p+q+r = d(M, AB) + d(M, BC) + d(M, AC) = v + \frac{\sqrt{3}u - v}{2} + \frac{-\sqrt{3}u - v + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

což je konstantní hodnota a tato konstanta je skutečně rovna výšce trojúhelníka ABC .

Metodické poznámky

Jde o geometrickou úlohu, jejíž syntetické řešení je vždy obtížné, neboť je třeba objevit způsob řešení, který nebývá u syntetického řešení algoritmicky daný. Analytické řešení je naopak algoritmicky dané, v této úloze je ale obtížné odstranění absolutní hodnoty ze vzorce pro vzdálenost bodu od přímky. Zajímavé na této úloze je právě to propojení syntetické a analytické geometrie.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: Pythagorova věta, pravoúhlý trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník, podobné trojúhelníky

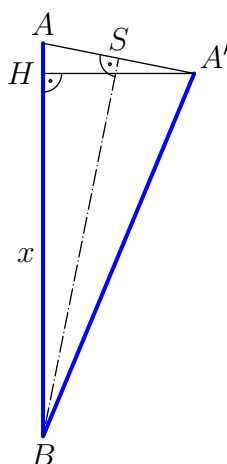
Úloha

Mléko se zpracovává ve velkých nerezových kádích ve tvaru válce. Do jedné z nich je svisle ponořena tyč na míchání, která se opírá dolním koncem o dno kádě. Délka nesmočené části tyče je 20 cm. Pootočí-li pracovník tyč opřenou o dno kádě tak, že se horní konec tyče dostane na hladinu, je vzdálenost horního konce tyče od průsečíku původní polohy tyče s hladinou 1 m (dle obrázku). Určete množství mléka v kádi, jestliže průměr kádě je 2,5 m.

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta

Nejdříve musíme určit výšku ponořené tyče. Dle obrázku je tyč znázorněna úsečkou AB , ponořená část HB . Druhá poloha tyče je dána úsečkou $A'B$. Ze zadání platí $|AH| = 0,2$ m, $|A'H| = 1$ m, $|AB| = |A'B|$. Označme dále $|BH| = x$.



Jelikož $A'BH$ je pravoúhlý trojúhelník s přeponou $A'B$, platí podle Pythagorovy věty

$$x^2 + 1 = (x + 0,2)^2.$$

Odtud plyne, že délka ponořené části tyče je $x = 2,4$ m.

Objem válce tak je

$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 1,25^2 \cdot 2,4 \doteq 11,775 \text{ m}^3.$$

Závěr. V kádi je přibližně 11 775 l mléka.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: podobnost trojúhelníků

Označme S střed úsečky AA' . Trojúhelníky AHA' a ASB jsou pravoúhlé a navíc mají společný úhel při vrcholu A . Z toho vyplývá, že trojúhelníky jsou podobné (uu). Platí tedy

$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|AA'|}{|AH|}.$$

Odtud

$$|AB| = \frac{|AS| \cdot |AA'|}{|AH|}. \quad (1)$$

Z trojúhelníku AHA' podle Pythagorovy věty dále platí

$$|AA'|^2 = |AH|^2 + |A'H|^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1^2.$$

Odtud dostaneme $|AA'| = \frac{\sqrt{26}}{5}$ m a $|AS| = \frac{1}{2} \cdot |AA'| = \frac{\sqrt{26}}{10}$ m. Využijeme vztahu (1) a dostaneme

$$|AB| = \frac{\frac{\sqrt{26}}{10} \cdot \frac{\sqrt{26}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2,6 \text{ m.}$$

Závěr. Délka ponořené části tyče je 2,4 m. Objem mléka dopočteme stejně jako v předchozím řešení a zjistíme, že v kádi je 11 775 l mléka.

Řešení 3 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: geometrická konstrukce trojúhelníku

Z obrázku vidíme, že ABA' je rovnoramenný se základnou AA' . Sestrojíme trojúhelník AHA' s pravým úhlem při vrcholu H . Bod B získáme jako průsečík přímky AH s osou úsečky AA' . Pomocí geometrické konstrukce sestrojíme úsečku BH . Zvolíme např. měřítko 1:40. Přizpůsobíme tedy velikosti $|AH| = 0,5$ cm, $|A'H| = 2,5$ cm. Měřením zjistíme, že délka úsečky BH je asi 6 cm, což v uvedeném měřítku odpovídá velikosti 2,4 m.

Závěr. Délka ponořené části tyče je 2,4 m. Objem mléka dopočteme stejně jako v prvním řešení a zjistíme, že v kádi je asi 11 775 l mléka.

Metodické poznámky

Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků a následně rozebrat jednotlivá řešení a jejich četnosti.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

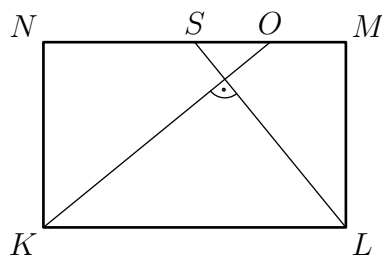
Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: podobnost, Pythagorova věta, Eukleidovy věty, skalární součin vektorů

Úloha

V obdélníku $KLMN$ je S střed úsečky MN a O střed úsečky SM . Určete poměr stran obdélníku $KLMN$, jsou-li přímky KO a SL navzájem kolmé (obr. 1).

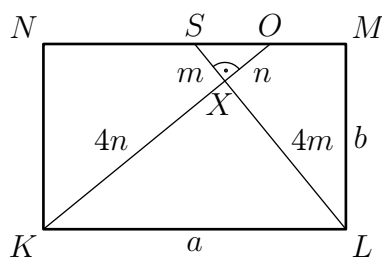


Obr. 1

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: podobnost trojúhelníků, Pythagorova věta

Označme X průsečík přímek KO a SL , $|KL| = a$, $|LM| = b$, $|SX| = m$, $|OX| = n$, $|SO| = \frac{a}{4}$, $|SM| = \frac{a}{2}$ (obr. 2). Pravoúhlé trojúhelníky KLX , OSX jsou podobné podle věty (uu) s poměrem podobnosti $k = 4$. To znamená, že výška na přeponu SO v trojúhelníku OSX má velikost $\frac{b}{5}$.



Obr. 2

Obsah trojúhelníku OSX je

$$\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{b}{5},$$

z této rovnosti vyjádříme m, n

$$m = \frac{ab}{20n}, \quad n = \frac{ab}{20m}. \quad (1)$$

Pravoúhlé trojúhelníky LSM , OSX jsou podobné podle věty (uu). Z podobnosti trojúhelníků KLX , OSX plyne

$$\frac{|SX|}{|OX|} = \frac{|SM|}{|LM|},$$

odtud

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{a}{2}}{b}.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme m , n

$$m = \frac{an}{2b}, \quad n = \frac{2bm}{a}. \quad (2)$$

Ze vztahů (1), (2) plynou následující rovnosti

$$\frac{ab}{20n} = \frac{an}{2b},$$

odtud $n^2 = \frac{b^2}{10},$

$$\frac{ab}{20m} = \frac{2bm}{a},$$

odtud $m^2 = \frac{a^2}{40}.$

V trojúhelníku SOX platí Pythagorova věta

$$m^2 + n^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2,$$

tedy

$$\frac{a^2}{40} + \frac{b^2}{10} = \frac{a^2}{16},$$

po úpravě dostaneme

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{8},$$

odtud

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Závěr. Pro poměr délek stran b , a v obdélníku $KLMN$ platí $b : a = \sqrt{6} : 4$.

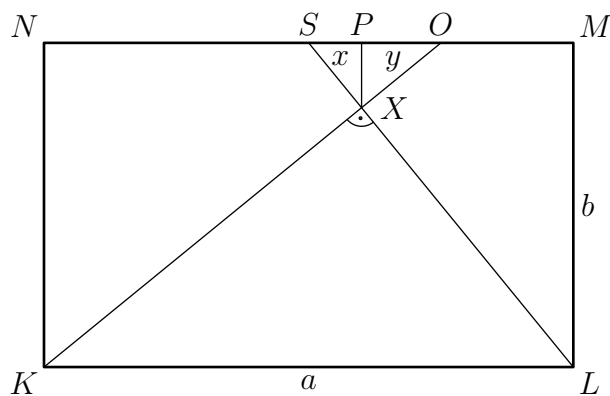
Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: podobnost trojúhelníků, Eukleidovy věty

Označme $|KL| = a$, $|LM| = b$, $|SM| = \frac{a}{2}$. Pravoúhlé trojúhelníky KLX , OSX jsou podobné podle věty (uu) s poměrem podobnosti $k = 4$. To znamená, že výška na přeponu SO má velikost $|PX| = \frac{b}{5}$. Pata P této výšky dělí úsečku SO na dva úseky délek x a y (obr. 3).

Trojúhelníky SPX a SML jsou podobné podle věty (uu). Z podobnosti těchto trojúhelníků plyne

$$\frac{|SP|}{|PX|} = \frac{|SM|}{|LM|},$$



Obr. 3

odtud

$$\frac{x}{\frac{b}{5}} = \frac{\frac{a}{2}}{b},$$

tedy

$$x = \frac{a}{10}, \quad y = |SO| - |SP| = |SO| - x = \frac{a}{4} - \frac{a}{10} = \frac{3a}{20}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku SXO platí Eukleidova věta o výšce

$$|PX|^2 = |SP| \cdot |PO|, \quad \left(\frac{b}{5}\right)^2 = xy, \quad \frac{b^2}{25} = \frac{a}{10} \cdot \frac{3a}{20},$$

odtud

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{8},$$

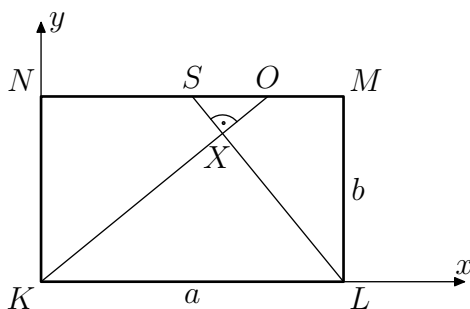
po odmocnění $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Závěr. Pro poměr délek stran b, a v obdélníku $KLMN$ opět platí $b : a = \sqrt{6} : 4$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie v rovině – skalární součin vektorů

Označme $|KL| = a$, $|LM| = b$. Obdélník $KLMN$ umístíme do pravoúhlé soustavy souřadnic v rovině, kde $K[0; 0]$, $L[a; 0]$, $S[\frac{a}{2}; b]$, $O[\frac{3a}{4}; b]$ (obr. 4).



Obr. 4

Potom $\mathbf{u} = L - S = (\frac{a}{2}; -b)$, $\mathbf{v} = O - K = (\frac{3a}{4}; b)$. Vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou navzájem kolmé, právě když jejich skalární součin je roven nule. To znamená $\mathbf{uv} = 0$, tj.

$$\frac{3a^2}{8} - b^2 = 0.$$

Odtud opět $\frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{8}$, po úpravě opět dostáváme $b : a = \sqrt{6} : 4$.

Metodické poznámky

Z mnoha způsobů, kterými lze úlohu řešit, autor vybral tři. V řešení 1 autor ukazuje, že i postup, který není elegantní, může být logicky správný. Řešení 2 je už potom kratší a elegantnější. Řešení 3 používá prostředků analytické geometrie. Úlohy, které by ukazovaly uplatnění analytické geometrie při řešení podobných planimetrických příkladů, ve středoškolských učebnicích chybí.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

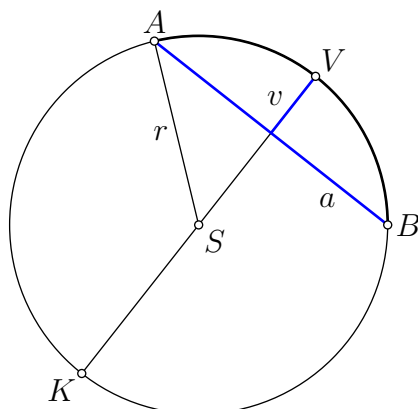
Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: Eukleidovy věty, Pythagorova věta, pravoúhlý trojúhelník, goniometrické vzorce

Úloha

Zdeněk s Vaškem se na svých toulkách v Kačerově dostaly k oblouku opuštěné železniční tratě. Věděli, že tento oblouk je částí kružnice. U tratě se začali dohadovat, jakým způsobem by šel zjistit poloměr oblouku. Nakonec to provedli následujícím způsobem. Na oblouku si zvolili dva body A, B . Změřili délku úsečky AB a výšku oblouku AB . Z těchto dvou údajů spočítali poloměr zatáčky (obr. 1). Navrhněte postup pro výpočet poloměru zatáčky.



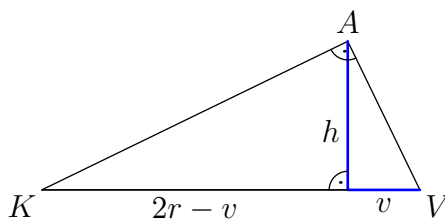
Obr. 1

Označme a délku úsečky AB , v výšku oblouku AB a r poloměr zatáčky.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: Thaletova kružnice, Eukleidovy věty

Podle obr. 1 je nad průměrem kružnice KV sestrojena Thaletova kružnice. To znamená, že trojúhelník KVA je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A . Poloměr r vypočítáme pomocí Eukleidovy věty o výšce z trojúhelníku KVA (obr. 2).



Obr. 2

Podle Euklidovy věty o výšce platí v trojúhelníku KVA vztah $(2r - v) \cdot v = h^2$, kde $h = \frac{a}{2}$. Ze vztahu $(2r - v) \cdot v = h^2$ vyjádříme r .

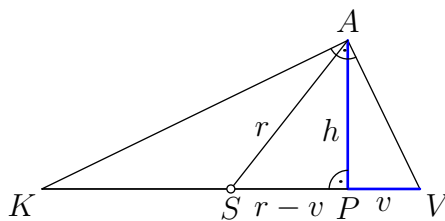
$$r = \frac{h^2 + v^2}{2v} = \frac{(\frac{a}{2})^2 + v^2}{2v} = \frac{a^2 + 4v^2}{8v}.$$

Závěr. Poloměr zatáčky je $r = \frac{a^2 + 4v^2}{8v}$, kde a je vzdálenost bodů A, B ; v je výška oblouku AB .

Řešení 2 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta

Podobně jako v řešení 1 vyjdeme z pravoúhlého trojúhelníku KVA . V tomto trojúhelníku je S střed přepony KV , P je pata výšky z vrcholu A (obr. 3).



Obr. 3

V pravoúhlém trojúhelníku SPA platí Pythagorova věta $(r - v)^2 + h^2 = r^2$, kde $h = \frac{a}{2}$. Odtud vyjádříme r .

$$r = \frac{h^2 + v^2}{2v}.$$

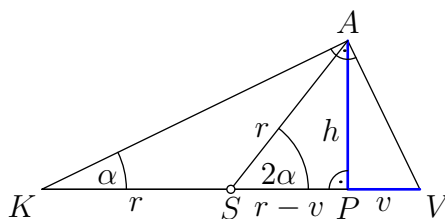
Pokud za h dosadíme $\frac{a}{2}$, opět dostáváme stejný výsledek jako v řešení 1

$$r = \frac{a^2 + 4v^2}{8v}.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Podobně jako v předchozích řešeních vycházíme z pravoúhlého trojúhelníku KVA , kde S je střed přepony KV a P je pata výšky z vrcholu A na přeponu KV (obr. 4).



Obr. 4

Trojúhelník KSA je rovnoramenný se základnou AK , kde $|\sphericalangle AKS| = |\sphericalangle SAK| = \alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku SPA je potom $|\sphericalangle ASP| = 2\alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku KPA platí $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2r-v}$, kde $h = \frac{a}{2}$ a v pravoúhlém trojúhelníku SPA podobně platí $\cos 2\alpha = \frac{r-v}{r}$. Pro každý úhel $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}.$$

Ze vztahu

$$\frac{h}{2r-v} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r-v}{r}}{1 + \frac{r-v}{r}}}$$

vyjádříme r

$$r = \frac{h^2 + v^2}{2v} = \frac{a^2 + 4v^2}{8v}.$$

Opět dostáváme pro poloměr zatáčky stejný výsledek $r = \frac{a^2 + 4v^2}{8v}$.

Metodické poznámky

V úloze jsou ukázány tři odlišné přístupy při počítání poloměru kružnice, známe-li délku tětivy a výšku příslušné kruhové úseče. Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků. Za nestandardní přístup lze považovat řešení 3. Řešení 3 ukazuje použití goniometrického vzorce při planimetrických výpočtech. Úlohy, které by ukazovaly uplatnění goniometrických vzorců při řešení konkrétních planimetrických a stereometrických příkladů, ve středoškolských učebnicích chybí.

Zdeněk s Vaškem nakonec zjistili, že na železničních tratích v Kačerově je poloměr oblouku vždy větší než 600 m. Proto z hodnot, které změřili $a = |AB| = 50$ m, výška oblouku $v = 0,5$ m, vypočítali poloměr ze zjednodušeného vztahu $r = \frac{a^2}{8v}$,

$$r = \frac{50^2}{8 \cdot 0,5} \text{ m} = 625 \text{ m}.$$

Tato hodnota se od přesného výsledku liší zanedbatelně. Přesný výsledek

$$r = \frac{a^2 + 4v^2}{8v} = \frac{50^2 + 4 \cdot 0,5^2}{8 \cdot 0,5} \text{ m} = 625,25 \text{ m}.$$

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie, Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: geometrie v rovině – pravoúhlý trojúhelník, analytická geometrie

Úloha

Určete velikost výšky pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou $c = |AB| = 8$ a obvodem $o = 18$.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, obsah trojúhelníka, kvadratická rovnice

Obsah pravoúhlého trojúhelníku lze vyjádřit vzorcem $S = \frac{1}{2}cv$ nebo $S = \frac{1}{2}ab$, kde a, b jsou délky odvěsen, c je délka přepony, v délka výšky kolmé k přeponě. Odtud $v = \frac{ab}{c}$, ze zadání $c = |AB| = 8$, tedy

$$v = \frac{ab}{8}. \quad (1)$$

Zároveň platí pro pravoúhlý trojúhelník Pythagorova věta $a^2 + b^2 = c^2$, tedy

$$a^2 + b^2 = 64. \quad (2)$$

Ze zadání $a + b = 10$ plyne

$$\begin{aligned} a^2 + (10 - a)^2 &= 64, \\ a^2 - 10a + 18 &= 0 \quad \Rightarrow \quad a = 5 \pm \sqrt{7}, \quad b = 5 - (\pm\sqrt{7}). \end{aligned}$$

Dosazením do (1) dostaneme

$$v = \frac{(5 \pm \sqrt{7}) \cdot (5 - (\pm\sqrt{7}))}{8} = \frac{9}{4}.$$

Závěr. Výška v_c zadaného trojúhelníka má délku $v_c = \frac{9}{4}$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník, Eukleidovy věty, kvadratická rovnice

Řešení vychází z Eukleidových vět, které platí v pravoúhlém trojúhelníku, věty o výšce

$$v^2 = c_a c_b$$

a vět o odvěsně

$$a^2 = c c_a, \quad b^2 = c c_b.$$

Přitom délka přepony $c = c_a + c_b$ je dle zadání $c = |AB| = 8$, obvod $a + b + c = 18$, odtud $a + b = 10$, kde $a = |BC|$; $b = |AC|$ jsou délky odvěsen, v je neznámá délka výšky kolmé k přeponě, c_a , c_b úseky na přeponě oddělené patou výšky. Po dosazení hodnot ze zadání do Eukleidových vět platí

$$a^2 = 8c_a, \quad b^2 = 8c_b, \quad \text{odkud} \quad v^2 = \frac{a^2b^2}{64}$$

a zároveň

$$c = c_a + c_b = \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{8} = c = 8.$$

Dosazením $b = 10 - a$ pak $a^2 + (10 - a)^2 = 64$, odkud $a = 5 \pm \sqrt{7}$ a tedy

$$a^2b^2 = (5 \pm \sqrt{7})^2 \cdot (64 - (5 \pm \sqrt{7})^2) = (32 \pm 10\sqrt{7}) \cdot (32 - (\pm 10\sqrt{7})) = 324.$$

Pak délka ($v > 0$) hledané výšky $v = \sqrt{\frac{a^2b^2}{64}} = \sqrt{\frac{81}{16}}$.

Závěr. Délka výšky v_c zadaného trojúhelníka je rovna $v_c = \frac{9}{4}$.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Thaletova věta, rovnice kružnice, definice a rovnice elipsy, soustava kvadratických rovnic

Délka výšky je rovna absolutní hodnotě y -ové souřadnice vrcholu C , který leží proti přeponě AB zadaného pravoúhlého trojúhelníka ABC . Podle Thaletovy věty leží souřadnice vrcholu C na kružnici s poloměrem $r = |AS| = 4$ a se středem S , který je zároveň středem úsečky AB . Ze zadání platí

$$(o = |BC| + |AC| + |AB| = 18) \wedge (c = |AB| = 8) \Rightarrow |BC| + |AC| = 10.$$

Všechny body, jejichž součet vzdáleností od bodů A a B je 10, leží na elipse s ohnisky A a B . Ohnisková vzdálenost $e = \frac{|AB|}{2} = 4$, délka hlavní osy je $2a = |BC| + |AC| = 10$, poloosa $a = 5$ a délka vedlejší poloosy je $b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Bod $C[x; y]$ leží současně na výše zmíněné kružnici i elipse. Trojúhelník lze umístit libovolně. Při umístění středu S do bodu $[0; 0]$ pro souřadnice bodu $C[x; y]$ platí

$$x^2 + y^2 = 16, \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \tag{4}$$

Řešením soustavy rovnic (3) a (4) lze získat souřadnice bodu C (např. dosazením za $y^2 = 16 - x^2$ z rovnice (3) do (4) a nalezením kořenů kvadratické rovnice $\frac{x^2}{25} + \frac{16-x^2}{9} = 1$ upravené na $16x^2 = 175$), odkud lze zjistit $|x| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ a poté z (3) $|y| = \frac{9}{4}$. Délka výšky v_c je pak rovna $|y| = \frac{9}{4}$.

Závěr. Délka výšky v_c zadaného trojúhelníka je rovna $v_c = \frac{9}{4}$.

Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vektory, skalární součin, vzdálenost dvou bodů v rovině – délka úsečky, iracionální rovnice

Trojúhelník lze umístit do kartézského systému souřadnic Oxy libovolně. Při zachování podmínek úlohy např. $A = [-4; 0]$, $B [4; 0]$, neznámý vrchol $C [x; y]$. Délka výšky v_c je pak rovna $|y| = \frac{9}{4}$. Souřadnice vektorů $\vec{CA} = A - C = (x + 4; y)$, $\vec{CB} = B - C = (x - 4; y)$.

$$\vec{CA} \perp \vec{CB}, \Rightarrow \vec{CA} \cdot \vec{CB} = (x + 4; y) \cdot (x - 4; y) = x^2 - 16 + y^2 = 0. \quad (5)$$

Ze zadání plyne

$$(o = |BC| + |AC| + |AB| = 18) \wedge (c = |AB| = 8), \text{ odkud } |BC| + |AC| = 10$$

a tedy

$$|BC| + |AC| = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} = 10. \quad (6)$$

Dosazením za $x^2 + y^2 = 16$ z (5) do (6) lze získat iracionální rovnici

$$\sqrt{32 - 8x} + \sqrt{32 + 8x} = 10, \quad (7)$$

po umocnění a dalších úpravách

$$\sqrt{32 - 8x} \cdot \sqrt{32 + 8x} = 18d \Rightarrow 16x^2 = 175.$$

Úprava rovnice (7) není ekvivalentní, proto je nutno řešení ověřit zkouškou. Pro obě řešení $x_{1,2} = \pm \frac{5\sqrt{7}}{4}$ se levá strana rovná pravé

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{32 - 8 \frac{5\sqrt{7}}{4}} + \sqrt{32 + 8 \frac{5\sqrt{7}}{4}} = \sqrt{25 - 10\sqrt{7} + 7} + \sqrt{25 + 10\sqrt{7} + 7} = \\ &= \sqrt{(5 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(5 + \sqrt{7})^2} = 10. \end{aligned}$$

$$P = 10.$$

$$L = P.$$

Dosazením $|x| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ do (5) je možno dopočítat $|y| = \frac{9}{4}$.

Závěr. Délka výšky v_c v daném trojúhelníku ABC je tedy $v_c = \frac{9}{4}$.

Metodické poznámky

Úloha může sloužit k zopakování početní geometrie – výpočtů pomocí vět platných pro pravoúhlý trojúhelník, obsah trojúhelníka, analytické geometrie – počítání s vektory, rovnice kuželoseček, řešení rovnic – kvadratická, lineární, soustava rovnic. Vzhledem k šíři látky je vhodná pro opakování ve vyšším ročníku nebo ji lze využít opakovaně po probrání jednotlivých kapitol a opětovně se k ní vracet.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: kružnice, tečna ke kružnici, Eukleidova věta o odvěsně, Pythagorova věta, funkce kosinus, Thaletova kružnice

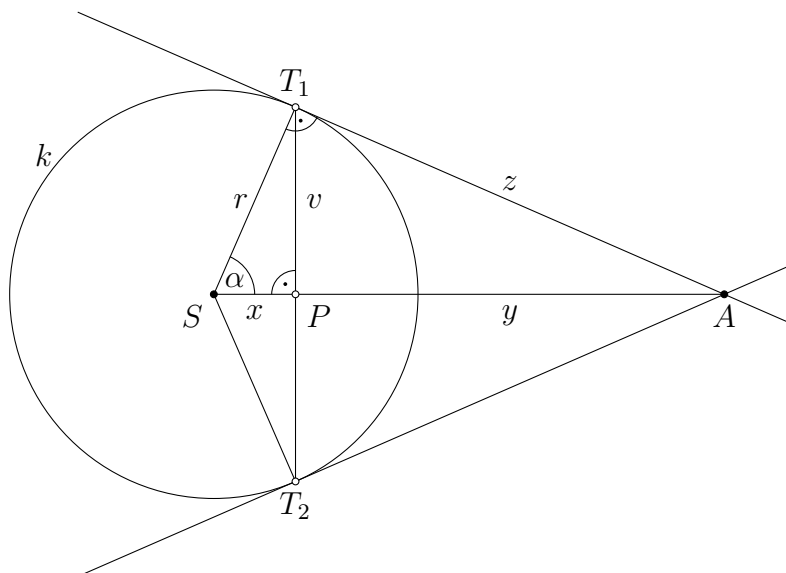
Úloha

Je dána kružnice $k(S, 6\text{ cm})$ a bod A , pro který platí $|AS| = 15\text{ cm}$. Vypočítejte vzdálenost bodu A od spojnice bodů dotyku tečen vedených z bodu A ke kružnici k .

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: Eukleidova věta o odvěsně

Graficky znázorníme situaci a popíšeme jednotlivé prvky, viz obr. 1. Úsečky v konstrukci označíme: $|SP| = x$, $|PA| = y$, $|AT_1| = z$, $|PT_1| = v$, $|ST_1| = r$.



Obr. 1: Grafické znázornění situace

V pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 , podle Eukleidovy věty o odvěsně, platí

$$r^2 = (x + y)x, \quad \text{tj.} \quad 36 = 15x, \quad \text{odkud} \quad x = 2,4.$$

Dosazením do vztahu $x + y = 15$ dostaneme $2,4 + y = 15$, odtud $y = 13,6$.

Závěr. Vzdálenost bodu A od spojnice bodů dotyku tečen vedených z bodu A ke kružnici k je 13,6 cm.

Řešení 2 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: funkce kosinus

V pravoúhlém trojúhelníku SAT_1 platí

$$\cos \alpha = \frac{r}{x + y}, \quad \text{tj.} \quad \cos \alpha = \frac{6}{15}, \quad \text{tedy} \quad \cos \alpha = 0,4.$$

Je zřejmé, že trojúhelník T_1SP je také pravoúhlý a platí

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \text{tj.} \quad \cos \alpha = \frac{x}{6}, \quad \text{odkud} \quad x = 2,4.$$

Dosazením do vztahu $x + y = 15$ dostaneme $2,4 + y = 15$, odtud $y = 13,6$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, řešení soustavy rovnic

Trojúhelníky T_1SP , SAT_1 a AT_1P jsou pravoúhlé. Z Pythagorovy věty plyne

$$\begin{aligned}x^2 + v^2 &= r^2, \\r^2 + z^2 &= (x + y)^2, \\y^2 + v^2 &= z^2.\end{aligned}$$

Dosazením délek úseček a užitím vztahu $y = 15 - x$ dostaneme

$$x^2 + v^2 = 36, \tag{1}$$

$$36 + z^2 = 225, \tag{2}$$

$$(15 - x)^2 + v^2 = z^2. \tag{3}$$

Z rovnice (2) vypočítáme

$$z^2 = 189,$$

dosadíme do rovnice (3), čímž obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$x^2 + v^2 = 36, \tag{4}$$

$$(15 - x)^2 + v^2 = 189. \tag{5}$$

Odečtením rovnic (4) a (5) získáme rovnici

$$x^2 - (15 - x)^2 = -153,$$

kterou dále řešíme

$$x^2 - 225 + 30x - x^2 = -153,$$

$$30x = 72,$$

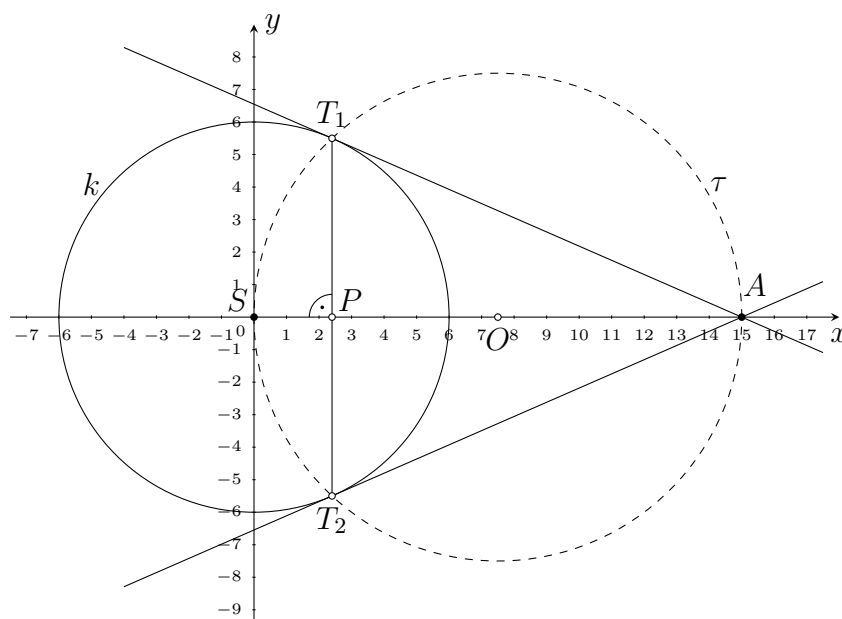
$$x = 2,4.$$

Dosazením do vztahu $y = 15 - x$ dostaneme $y = 13,6$.

Řešení 4 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Thaletova kružnice, středová rovnice kružnice

K řešení úlohy využijeme analytického vyjádření kružnice. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic Oxy tak, aby střed S kružnice k byl v počátku soustavy souřadnic a bod A ležel na ose x , viz obr. 2. Takto umístěné body budou mít souřadnice $S[0; 0]$, $A[15; 0]$ a kružnice k bude určena rovnicí $x^2 + y^2 = 36$.



Obr. 2: Umístění kružnice k a bodu A do kartézského systému souřadnic Oxy

K tomu, abychom mohli vypočítat vzdálenost bodu A od spojnice bodů dotyku tečen vedených z bodu A ke kružnici k , stačí určit x -ovou souřadnici bodu P , která má stejnou hodnotu jako x -ové souřadnice tečných bodů T_1 , T_2 . Tyto získáme jako souřadnice průsečíků kružnice k a Thaletovy kružnice τ sestrojené nad úsečkou SA . Thaletova kružnice bude určena středovou rovnicí

$$(x - 7,5)^2 + y^2 = 56,25.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 36, \\ (x - 7,5)^2 + y^2 &= 56,25, \end{aligned}$$

kterou upravíme na tvar

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 36, \\ x^2 - 15x + y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením těchto rovnic dostaneme $15x = 36$, odkud $x = 2,4$.

Souřadnice bodu P jsou $P[2,4; 0]$ a hledaná vzdálenost je tedy $(15 - 2,4) = 13,6$.

Metodické poznámky

Při řešení dané úlohy ukážeme použití různých vzorců z oblasti trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku. Zdůrazníme význam Pythagorovy věty, Eukleidových vět, definice hodnot goniometrických funkcí a zmíníme i možnost analytického řešení. Studenti pak mohou sami posoudit výhody či nevýhody jednotlivých způsobů řešení.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Sedláček Lubomír, Ph.D.; lsedlacekf@fai.utb.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: kružnice trojúhelníku opsaná, obsah trojúhelníku, Heronův vzorec, sinová věta, kosinová věta, vzdálenost dvou bodů v rovině, středová rovnice kružnice, obecná rovnice přímky

Úloha

Je dán trojúhelník ABC , jehož délky stran jsou $a = 2\sqrt{13}$, $b = 4\sqrt{2}$, $c = 10$. Určete poloměr kružnice trojúhelníku ABC opsané.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí poloměru kružnice trojúhelníku opsané, Heronův vzorec

Užitím Heronova vzorce

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}, \quad \text{kde } s = \frac{a + b + c}{2},$$

vypočítáme obsah trojúhelníku ABC .

Do vzorce dosazujeme délky stran trojúhelníku ABC vyjádřené desetinnými čísly, zaokrouhlené na desetiny ($a \doteq 5,7$, $b \doteq 7,2$, $c = 10$), takže dostáváme

$$S = \sqrt{11,45 \cdot (11,45 - 5,7) \cdot (11,45 - 7,2) \cdot (11,45 - 10)} \doteq 20,14.$$

Ze vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku pomocí poloměru kružnice trojúhelníku opsané

$$S = \frac{abc}{4r}$$

vyjádříme

$$r = \frac{abc}{4S}.$$

Dosazením pak obdržíme

$$r = \frac{5,7 \cdot 7,2 \cdot 10}{4 \cdot 20,14} \doteq 5,1.$$

Závěr. Poloměr kružnice trojúhelníku ABC opsané je $r \doteq 5,1$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: sinová věta, kosinová věta

Z kosinové věty pro trojúhelník ABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

vyjádříme

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dosazením získáme

$$\cos \alpha = \frac{(4\sqrt{2})^2 + 10^2 - (2\sqrt{13})^2}{2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Protože $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, dostáváme po dosazení

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}, \quad \text{odkud} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Z formulace sinové věty plyne, že

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad \text{odkud} \quad r = \frac{2\sqrt{13}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5,1.$$

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vzdálenost dvou bodů v rovině, středová rovnice kružnice, obecná rovnice přímky, řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

Při řešení úlohy využijeme vztahů z oblasti analytické geometrie. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic Oxy tak, aby vrchol A trojúhelníku ABC byl v počátku soustavy souřadnic a vrchol B ležel na kladné části osy x , viz obr. 1. Takto umístěné vrcholy budou mít souřadnice $A[0;0]$ a $B[10;0]$. Souřadnice vrcholu C určíme řešením soustavy středových rovnic kružnic $k(A, 4\sqrt{2})$ a $l(B, 2\sqrt{13})$. Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (4\sqrt{2})^2, \\x^2 + (y - 10)^2 &= (2\sqrt{13})^2,\end{aligned}$$

kteřou upravíme na tvar

$$x^2 + y^2 = 32, \tag{1}$$

$$x^2 - 20x + y^2 = -48. \tag{2}$$

Odečtením rovnice (2) od rovnice (1) pak obdržíme $20x = 80$, jejímž kořenem je $x = 4$. Dosazením tohoto kořene např. do rovnice (1) dostaneme $y = 4$. Vrchol C má tedy souřadnice $C[4,4]$. Nyní určíme střed kružnice trojúhelníku ABC opsané jako průsečík os stran b a c . Osa o_b prochází středem strany b o souřadnicích $S_b[2,2]$ a má normálový vektor $\overrightarrow{AC} = (4;4)$. Pak může mít rovnici

$$4x + 4y + c = 0.$$

Konstantu c vypočítáme dosazením souřadnic středu $S_b[2;2]$ do této rovnice. Dostáváme

$$4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + c = 0, \quad \text{odkud} \quad c = -16.$$

Osa o_b má tedy rovnici

$$4x + 4y - 16 = 0,$$

po úpravě

$$x + y - 4 = 0.$$

Protože osa o_c strany c , procházející středem $S_c[5; 0]$, je kolmá k ose x , lze její rovnici

$$x - 5 = 0$$

určit snadno.

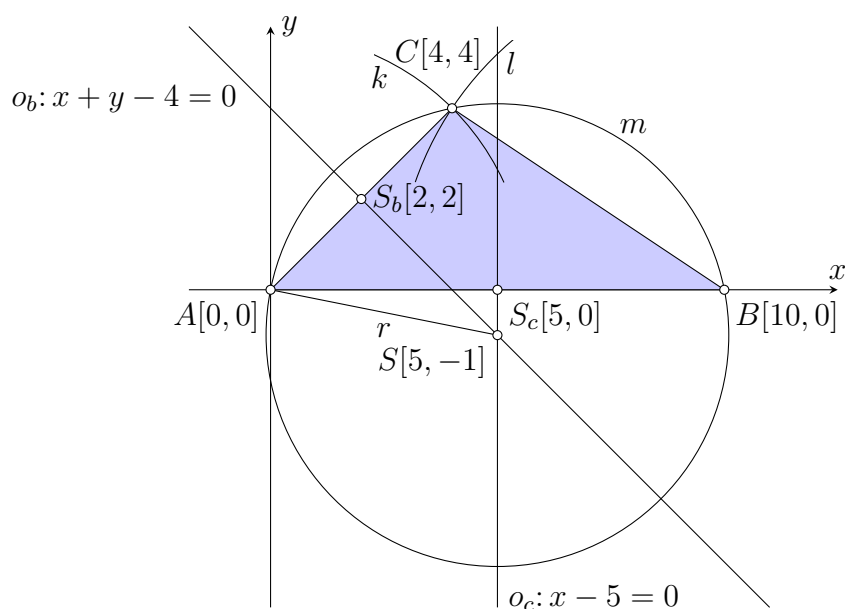
Řešením jednoduché soustavy rovnic

$$x + y - 4 = 0,$$

$$x - 5 = 0$$

pak získáme kořeny $x = 5$, $y = -1$ a tím i souřadnice středu kružnice trojúhelníku ABC opsané $S[5; -1]$. Poloměr kružnice opsané potom bude

$$r = |SA| = \sqrt{(0 - 5)^2 + [0 - (-1)]^2} = \sqrt{26} \doteq 5,1.$$



Obr. 1: Obrázek k analytickému řešení

Metodické poznámky

Uvedené metody řešení dané úlohy umožňují uplatnit nejen různý způsob řešení, ale i různou náročnost dané metody řešení. Od nejjednoduššího způsobu, vycházejícího z aplikace vzorců na výpočet obsahu trojúhelníku, přes složitější trigonometrický, až po nejtěžší analytický způsob. U tohoto způsobu řešení klademe důraz na vhodné umístění trojúhelníku do kartézské soustavy souřadnic.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Sedláček Lubomír, Ph.D.; lsedlacekf@fai.utb.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: výška v trojúhelníku, obsah trojúhelníku, Heronův vzorec, podobnost trojúhelníků, kosinová věta, funkce sinus, obecná rovnice přímky, vzdálenost bodu od přímky

Úloha

V trojúhelníku ABC , jehož velikosti výšek jsou $v_a = 9$, $v_b = 6$, $v_c = 4$, určete délky stran.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: podobnost trojúhelníků, vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku, Heronův vzorec

Ze základních vztahů pro výpočet obsahu trojúhelníku ABC

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2},$$

získáme rovnost postupných poměrů

$$a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}.$$

Po dosazení velikostí výšek dostaneme

$$a : b : c = \frac{1}{9} : \frac{1}{6} : \frac{1}{4},$$

odkud

$$a : b : c = 4 : 6 : 9. \quad (1)$$

Ze vztahu (1) vyplývá, že existuje trojúhelník $A'B'C'$ se stranami $a' = 4$ cm, $b' = 6$ cm, $c' = 9$ cm, který je podobný trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti například

$$k = \frac{v'_a}{v_a}. \quad (2)$$

Velikost výšky v'_a určíme ze vztahů pro výpočet obsahu trojúhelníku $A'B'C'$. Užitím Heronova vzorce

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a + b + c}{2},$$

nejdříve vypočítáme obsah trojúhelníku $A'B'C'$

$$S' = \sqrt{9,5 \cdot (9,5 - 4) \cdot (9,5 - 6) \cdot (9,5 - 9)} \doteq 9,56,$$

který potom dosadíme do vztahu

$$v'_a = \frac{2S'}{a'},$$

čímž obdržíme délku výšky $v'_a = 4,78$, jejímž následným dosazením do vztahu (2) určíme i velikost koeficientu podobnosti $k = 0,53$. Úpravou vztahů pro poměry odpovídajících si stran podobných trojúhelníků ABC a $A'B'C'$

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

dostaneme

$$a = \frac{a'}{k}, \quad b = \frac{b'}{k}, \quad c = \frac{c'}{k},$$

odkud

$$a = \frac{4}{0,53} \doteq 7,54; \quad b = \frac{6}{0,53} \doteq 11,32; \quad c = \frac{49}{0,53} \doteq 16,98.$$

Závěr. Velikosti stran trojúhelníku ABC jsou přibližně $a = 7,54$; $b = 11,32$; $c = 16,98$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: podobnost trojúhelníků, vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku, výpočet velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, kosinová věta, funkce sinus

Z Řešení 1 plyne, že trojúhelník $A'B'C'$ se stranami $a' = 4$ cm, $b' = 6$ cm, $c' = 9$ cm je podobný trojúhelníku ABC . Protože odpovídající si úhly podobných trojúhelníků jsou shodné můžeme aplikací kosinové věty v trojúhelníku $A'B'C'$ vypočítat velikosti úhlů trojúhelníku ABC . Z kosinové věty pro trojúhelník $A'B'C'$

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos \alpha$$

vyjádříme

$$\cos \alpha = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}.$$

Dosazením získáme

$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 9^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 9} = \frac{101}{108},$$

odkud $\alpha = 20^\circ 44'$. Analogicky platí

$$b'^2 = a'^2 + c'^2 - 2a'c' \cos \beta,$$

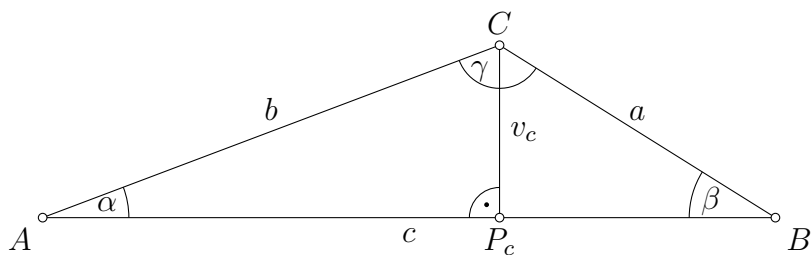
odkud

$$\cos \beta = \frac{a'^2 + c'^2 - b'^2}{2a'c'} = \frac{4^2 + 9^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{61}{72}$$

a odtud $\beta = 32^\circ 5'$. Protože v trojúhelníku ABC platí, že $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ dostáváme po dosazení $\gamma = 180^\circ - (20^\circ 44' + 32^\circ 5') = 127^\circ 11'$. Trojúhelník ABC je tedy tupouhlý s tupým úhlem při vrcholu C , z čehož vyplývá, že výška v_c leží uvnitř tohoto trojúhelníku (viz obr. 1) a k výpočtu délek stran a, b můžeme využít pravoúhlých trojúhelníků AP_cC a CP_cB .

Platí

$$a = \frac{v_c}{\sin \beta}, \quad b = \frac{v_c}{\sin \alpha},$$



Obr. 1: Grafické znázornění trojúhelníku ABC

odkud

$$a = \frac{4}{\sin 32^\circ 5'} \doteq 7,53, \quad b = \frac{4}{\sin 20^\circ 44'} \doteq 11,30.$$

K výpočtu délky strany c použijeme opět kosinovou větu

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma},$$

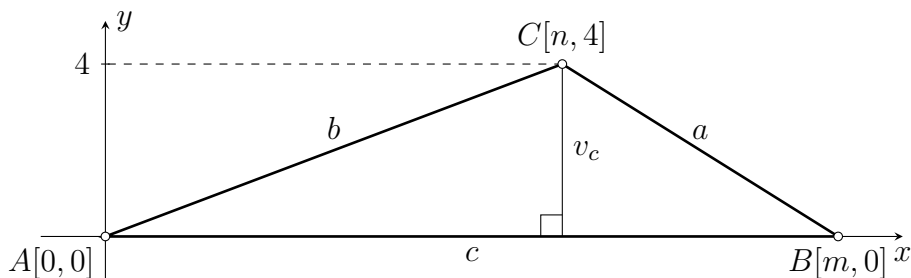
odkud po dosazení obdržíme

$$c = \sqrt{7,53^2 + 11,30^2 - 2 \cdot 7,53 \cdot 11,30 \cdot \cos 127^\circ 11'} \doteq 16,95.$$

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: obecná rovnice přímky, vzdálenost bodu od přímky

Při řešení úlohy využijeme vztahů z oblasti analytické geometrie. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic Oxy tak, aby vrchol A trojúhelníku ABC byl v počátku soustavy souřadnic a vrchol B ležel na kladné části osy x , viz obr. 2. Vzhledem k umístění těchto bodů a k velikosti výšky $v_c = 4$, budou mít vrcholy souřadnice $A[0; 0]$, $B[m; 0]$ a $C[n; 4]$.



Obr. 2: Obrázek k analytickému řešení

Vzdálenost bodu B od přímky AC , která má rovnici $4x + ny = 0$, je rovna velikosti výšky $v_b = 6$. Podle vzorce pro vzdálenost bodu od přímky tedy platí

$$\frac{4m}{\sqrt{16 + n^2}} = 6.$$

Obdobně pro vzdálenost bodu A od přímky BC , která má rovnici $4x + (m - n)y - 4m = 0$ platí vztah

$$\frac{4m}{\sqrt{16 + (m - n)^2}} = 9.$$

Dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\frac{4m}{\sqrt{16+n^2}} = 6,$$

$$\frac{4m}{\sqrt{16+(m-n)^2}} = 9,$$

kterou upravíme na tvar

$$16m^2 = 36(16+n^2), \quad (3)$$

$$16m^2 = 81(16+m^2-2mn+n^2). \quad (4)$$

Z rovnice (3) vyjádříme $16+n^2$ a dosadíme do rovnice (4), čímž obdržíme rovnici ve tvaru

$$16m^2 = 81 \left(\frac{4m^2}{9} + m^2 - 2mn \right),$$

po úpravě

$$101m^2 - 162mn = 0.$$

Protože z umístění trojúhelníku ABC v kartézské soustavě souřadnic je zřejmé, že x -ová souřadnice m bodu B je nenulová, můžeme rovnici vydělit číslem m , čímž získáme

$$101m - 162n = 0,$$

odkud

$$n = \frac{101}{162}m. \quad (5)$$

Dosazením do rovnice (4) dostaneme

$$16m^2 = 36 \left[16 + \left(\frac{101}{162}m \right)^2 \right],$$

odkud

$$m \doteq 16,94,$$

čímž jsme současně určili i velikost strany $c = |AB| \doteq 16,94$. Dosazením do (5) určíme $n \doteq 10,56$ a tím i souřadnice vrcholů $B [16,94; 0]$, $C [10,56; 4]$. Nyní snadno určíme velikosti zbývajících stran ze vzorce pro vzdálenost dvou bodů v rovině

$$a = |BC| = \sqrt{(10,56 - 16,94)^2 + (4 - 0)^2} \doteq 7,53,$$

$$b = |AC| = \sqrt{(10,56 - 0)^2 + (4 - 0)^2} \doteq 11,29.$$

Metodické poznámky

Drobné odchylky ve výsledcích při uplatnění různých metod řešení zdůvodníme zaokrouhlováním jednotlivých veličin v průběhu výpočtů.

Zdroj: archiv autora

Kočandrlé, M., Boček, L. *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie*. Praha: Prometheus, 2002.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Sedláček Lubomír, Ph.D.; lsedlacekf@fai.utb.cz

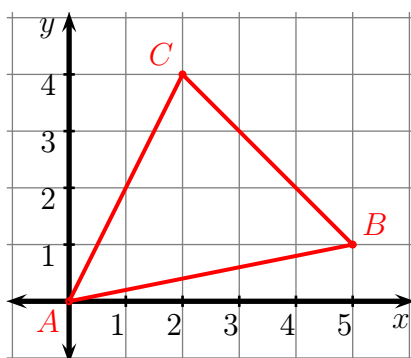
Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: obsah trojúhelníku, kosinová věta, vektorový součin

Úloha

Určete obsah trojúhelníku ABC , jehož souřadnice vrcholů v kartézské soustavě souřadnic $0xy$ jsou $A[0; 0]$, $B[5; 1]$ a $C[2; 4]$.

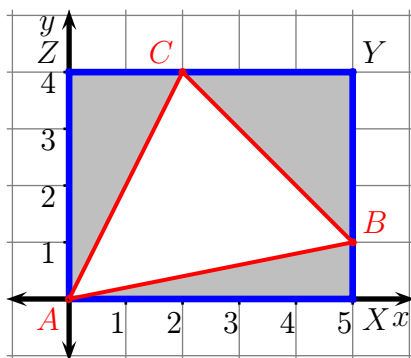


Obr. 1

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obsah pravoúhlého trojúhelníku, obsah obdélníku

Obsah daného trojúhelníku můžeme snadno určit využitím čtvercové sítě (obr. 2), do které je trojúhelník zakreslen. Od obsahu S_{AXYZ} pravoúhlíku $AXYZ$ odečteme obsahy S_{AXB} , S_{BYC} , S_{CZA} pravoúhlých trojúhelníků AXB , BYC a CZA .



Obr. 2

Obsah trojúhelníku ABC je tedy

$$S_{ABC} = S_{AXYZ} - S_{AXB} - S_{BYC} - S_{CZA} = 20 - \frac{5 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} = 9.$$

Závěr. Obsah trojúhelníku ABC je 9.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obsah trojúhelníku, kosinová věta, vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Druhou možností je využití základních planimetrických vztahů v trojúhelníku. Délky jednotlivých stran trojúhelníku můžeme určit pomocí Pythagorovy věty. Platí tedy

$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}, \\|BC| &= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}, \\|AC| &= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}.\end{aligned}$$

Z kosinové věty dále vypočteme

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{20 + 26 - 18}{2 \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{26}} = \frac{7\sqrt{130}}{130}.$$

Hodnotu $\sin \alpha > 0$ (jedná se o úhel v trojúhelníku) získáme jednoduchou úpravou ze základní goniometrické identity $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ následovně

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{7\sqrt{130}}{130}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{130}} = \frac{9\sqrt{130}}{130}.$$

Pro obsah trojúhelníku ABC tak platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{9\sqrt{130}}{130} = \frac{9 \cdot 260}{260} = 9.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, vzdálenost bodu od přímky zadané obecnou rovnicí

Třetí možností je využití prostředků analytické geometrie v rovině. Vyjádříme nejprve obecnou rovnici přímky AB . Směrový vektor přímky je $B - A = (5; 1)$, příslušný normálový vektor je $\vec{n} = (1; -5)$. Protože daná přímka prochází počátkem souřadné soustavy, je její obecná rovnice

$$p: x - 5y = 0.$$

Pro vzdálenost bodu C od přímky p platí:

$$v(C, p) = \frac{|2 - 5 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{18}{\sqrt{26}} = \frac{9\sqrt{26}}{13}.$$

Délka strany AB je $|AB| = \sqrt{26}$, pro obsah trojúhelníku tedy platí

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot v(C, p) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{9\sqrt{26}}{13} = \frac{9 \cdot 26}{26} = 9.$$

Řešení 4 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vektorový součin

Další způsob výpočtu obsahu trojúhelníku je založen na využití vlastností vektorového součinu vektorů v prostoru. Uvažujme trojrozměrné vektory

$$\vec{u} = B - A = (5; 1; 0),$$

$$\vec{v} = C - A = (2; 4; 0).$$

Vektorový součin obou vektorů je roven

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (0; 0; 18).$$

Pro obsah trojúhelníku ABC pak platí

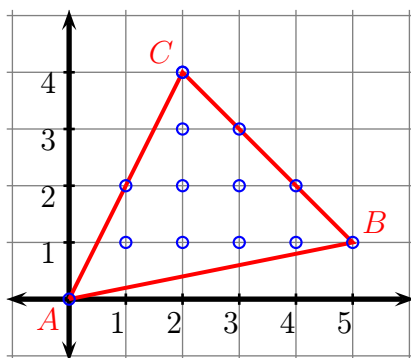
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{w}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 18^2} = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9.$$

Řešení 5 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Pickův vzorec

Jednou z možností výpočtu obsahu trojúhelníku využitím čtvercové sítě je výpočet založený na Pickovu vzorci. K určení obsahu rovinného souvislého útvaru ohraničeného úsečkami, jejichž krajní body jsou v mřížových bodech souřadné soustavy, stačí znát počet mřížových bodů u uvnitř mnohoúhelníku a počet mřížových bodů h na hranici mnohoúhelníku. Obsah útvaru je pak dán vztahem

$$S = u + \frac{h}{2} - 1.$$



Obr. 3

Pro daný trojúhelník ABC dostáváme $u = 7$, $h = 6$. Celkový obsah trojúhelníku tedy je

$$S_{ABC} = 7 + \frac{6}{2} - 1 = 9.$$

Řešení 6 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: integrální počet, výpočet určitého integrálu

Využitím integrálního počtu funkce jedné proměnné můžeme obsah rovinného útvaru ohraničeného dvěma křivkami vypočítat jako určitý integrál z rozdílu daných funkcí v určeném intervalu. Nejprve určíme rovnice lineárních funkcí ohraničujících danou oblast. Přímka AB má rovnici

$$y = \frac{1}{5}x,$$

přímka AC rovnici

$$y = 2x$$

a přímka BC rovnici

$$y = 6 - x.$$

Celý trojúhelník rozdělíme na dvě oblasti pomocí přímky $x = 2$. Celkový obsah trojúhelníku je pak

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(2x - \frac{1}{5}x \right) dx + \int_2^5 \left(6 - x - \frac{1}{5}x \right) dx &= \int_0^2 \frac{9}{5}x dx + \int_2^5 \left(6 - \frac{6}{5}x \right) dx = \\ &= \left[\frac{9x^2}{10} \right]_{x=0}^2 + \left[6x - \frac{3x^2}{5} \right]_{x=2}^5 = \left(\frac{36}{10} - 0 \right) + \left((30 - 15) - \left(12 - \frac{12}{5} \right) \right) = 9. \end{aligned}$$

Metodické poznámky

Obsah trojúhelníku patří k základním poznatkům planimetrie. První způsob řešení využívá pouze znalosti, se kterými žáci přicházejí na střední školu, druhý se opírá o planimetrické poznatky, třetí je založen na využití prostředků analytické geometrie. Zbylé tři způsoby přesahují RVP, ale jejich užití nabízí studentům možnost pochopit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a účelně využívat i jiné matematické prostředky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: obsah trojúhelníku

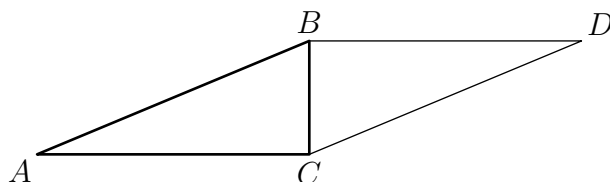
Úloha

Určete obsah trojúhelníku ABC , jsou-li dány souřadnice jeho vrcholů $A[-4; -2]$, $B[8; 3]$, $C[8; -2]$.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vektorový součin

Předvedme situaci z roviny do prostoru, pak zřejmě pro souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC platí $A[-4; -2; 0]$, $B[8; 3; 0]$, $C[8; -2; 0]$. Obsah trojúhelníku ABC je roven polovině obsahu rovnoběžníku znázorněného na obr.



Nejprve určíme vektory

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (12; 5; 0) \quad \text{a} \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (12; 0; 0).$$

Dále určíme $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ dle známého vztahu pro určení vektorového součinu dvou vektorů, tedy

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0; 0; -60).$$

Obsah rovnoběžníku $ABDC$ odpovídá velikosti vektoru $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, tj.

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-60)^2} = 60.$$

Odtud obsah trojúhelníku ABC je 30.

Závěr. Obsah trojúhelníku ABC je 30.

Řešení 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: Heronův vzorec, vzdálenost bodů v rovině

Uvažujme standardní značení stran trojúhelníku ABC , tj. a , b , c . Nejprve určíme velikosti jednotlivých stran trojúhelníku ABC .

$$a = |BC| = \sqrt{(8 - 8)^2 + (-2 - 3)^2} = 5,$$

$$b = |AC| = \sqrt{(8 - (-4))^2 + (-2 - (-2))^2} = 12,$$

$$c = |AB| = \sqrt{(8 - (-4))^2 + (3 - (-2))^2} = 13.$$

Obsah S trojúhelníku ABC určíme pomocí Heronova vzorce, tj.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (1)$$

kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Máme $s = \frac{1}{2}5 + 12 + 13 = 15$. Po dosazení do vztahu (1) za $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, $s = 15$ dostaneme $S = 30$.

Závěr. Obsah trojúhelníku ABC je 30.

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: obecná rovnice přímky, vzdálenost bodu a přímky v rovině

Označme p přímku určenou body A, B . Je-li $\overrightarrow{AB} = B - A = (12; 5)$ směrový vektor přímky p , pak normálový vektor přímky p je $\mathbf{n} = (5; -12)$. Obecná rovnice přímky p má pak tvar

$$5x - 12y + c = 0.$$

Leží-li bod A na přímce p , pak $c = -4$. Tedy obecná rovnice přímky p je

$$5x - 12y - 4 = 0.$$

Označme v_c výšku na stranu c v trojúhelníku ABC . Zřejmě platí, že $v_c = |Cp|$. Vzdálenost $|Cp|$ určíme dle známého vztahu pro určení vzdálenosti bodu od přímky v rovině, tj. platí

$$v_c = |Cp| = \frac{|5 \cdot 8 + (-12) \cdot (-2) + (-4)|}{\sqrt{(5)^2 + (-12)^2}} = \frac{60}{13}.$$

Dále určíme délku strany c trojúhelníku ABC , tj.

$$c = |AB| = \sqrt{(8 - (-4))^2 + (3 - (-2))^2} = 13.$$

Obsah S trojúhelníku určíme dle známého vztahu

$$S = \frac{cv_c}{2}. \quad (2)$$

Po dosazení do vztahu (2) za $c = 13$, $v_c = \frac{60}{13}$ dostaneme $S = 30$.

Závěr. Obsah trojúhelníku ABC je 30.

Metodické poznámky

Třemi různými způsoby řešení úlohy demonstrujeme prostředky analytické geometrie ale i trigonometrie. Úlohu je možné zadat jak pro samostatnou práci tak skupinovou práci s tím, že žáci mohou hledat více způsobů řešení a následně diskutovat jejich výhody.

Zdroj:

Benda, P., Daňková, B., Skála, J. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 9. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986, 199 s.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: obsah trojúhelníku, analytická geometrie, vzdálenosti

Úloha

V rovině jsou dány tři body $A = [1; 8]$, $B = [6; 20]$, $C = [2; 3]$. Vypočítejte různými způsoby obsah trojúhelníku ABC .

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: Heronův vzorec, délka úsečky – vzdálenost dvou bodů, mocniny, odmocniny, úpravy výrazů, dosazování do vzorce

Využijeme Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde a , b , c jsou délky stran trojúhelníku a $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Nejprve vypočítáme délky stran $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Dosadíme souřadnice bodů do známých vztahů pro vzdálenost dvou bodů a vypočítáme

$$|BC| = \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (20 - 3)^2} = \sqrt{305},$$

$$|AC| = \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (8 - 3)^2} = \sqrt{26},$$

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (8 - 20)^2} = 13.$$

Vypočítané délky stran dosadíme do Heronova vzorce a upravíme

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{\sqrt{305} + \sqrt{26} + 13}{2} \cdot \frac{\sqrt{26} + 13 - \sqrt{305}}{2} \cdot \frac{\sqrt{305} - \sqrt{26} + 13}{2} \cdot \frac{\sqrt{305} + \sqrt{26} - 13}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(\sqrt{26} + 13 + \sqrt{305})(\sqrt{26} + 13 - \sqrt{305})(\sqrt{305} - \sqrt{26} + 13)(\sqrt{305} + \sqrt{26} - 13)}. \end{aligned}$$

Opakovaným využitím vzorce $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ dostáváme

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(26 + 26\sqrt{26} + 169 - 305\right) \left(305 - \left(26 - 26\sqrt{26} + 169\right)\right)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\left(26\sqrt{26} + 110\right) \left(26\sqrt{26} - 110\right)} = \frac{1}{4} \sqrt{26^3 - 110^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{26 \cdot 169 - 55^2} = \frac{\sqrt{4394 - 3025}}{2} = \frac{\sqrt{1369}}{2} = \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

Závěr. Obsah trojúhelníku ABC je tedy $\frac{37}{2}$.

Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: délka úsečky, obecná rovnice přímky, vzdálenost bodu od přímky

Využijeme vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka $S = \frac{1}{2}av_a$, kde a je délka strany AB a v_a je výška na stranu a . Délku strany počítáme jako vzdálenost bodů B a C (viz první řešení) $a = |BC| = \sqrt{305}$. Délku výšky vypočítáme jako vzdálenost bodu A od přímky BC .

Nejprve vyjádříme obecnou rovnici přímky BC ve tvaru $px + qy + r = 0$, kde p, q, r jsou reálná čísla. Přitom $(p; q)$ je normálový vektor. Ze směrového vektoru $\mathbf{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-4; -17)$ vypočítáme normálový vektor $\mathbf{n} = (17; -4)$ na základě znalosti, že skalární součin těchto vektorů musí být roven nule. Odtud se dostáváme k rovnici $17x - 4y + r = 0$ a po dosazení souřadnic bodu B , který na této přímce leží, k obecné rovnici přímky $17x - 4y - 22 = 0$.

Vzdálenost bodu A od přímky BC pak je

$$v_a = \frac{|17 \cdot 1 - 4 \cdot 8 - 22|}{\sqrt{17^2 + 4^2}} = \frac{37}{\sqrt{305}}.$$

Obsah trojúhelníku nyní dopočítáme dosazením do výše uvedeného vzorce.

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{\sqrt{305} \cdot \frac{37}{\sqrt{305}}}{2} = \frac{37}{2}.$$

Závěr. Obsah trojúhelníku je $\frac{37}{2}$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: délka úsečky, parametrický tvar rovnice přímky, průsečík dvou přímek, vzdálenost bodu od přímky

Řešení je obdobou řešení 2, používáme však parametrický tvar rovnice přímky a délku výšky počítáme jako vzdálenost paty výšky od vrcholu A .

Zůstává délka strany $a = |BC| = \sqrt{305}$. Vyjádříme parametrický tvar rovnice přímky BC dané směrovým vektorem $\mathbf{u} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-4; -17)$ a např. bodem $C = [2; 3]$.

$$\begin{aligned} BC: \quad x &= 2 - 4t, \\ y &= 3 - 17t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Přímka výšky je kolmá k přímce BC a prochází bodem A , má tedy rovnici

$$\begin{aligned} x &= 1 + 17s, \\ y &= 8 - 4s, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2 - 4t &= 1 + 17s, \\ 3 - 17t &= 8 - 4s, \end{aligned}$$

dostáváme $t = -\frac{81}{305}$, odkud po dosazení do rovnice přímky BC zjišťujeme, že pata výšky P (průsečík obou přímek) má souřadnice

$$P \left[2 - \frac{4 \cdot (-81)}{305}; 3 - \frac{17 \cdot (-81)}{305} \right],$$

tedy

$$\begin{aligned} v_a = |AP| &= \sqrt{\left(2 + \frac{324}{305} - 1\right)^2 + \left(3 + \frac{1377}{305} - 8\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{629}{305}\right)^2 + \left(\frac{-148}{305}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{17 \cdot 37}{305}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 37}{305}\right)^2} = \frac{37\sqrt{279+16}}{305} = \frac{37\sqrt{305}}{305}. \end{aligned}$$

Dále pokračujeme jako v řešení 1.

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{\sqrt{305} \cdot \frac{37 \cdot \sqrt{305}}{305}}{2} = \frac{37}{2}.$$

Závěr. Obsah trojúhelníku je $\frac{37}{2}$.

Řešení 4 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: délka úsečky, rovnice přímky, průsečík dvou přímek, vzdálenost bodu od přímky

Řešení je obdobou předcházejících řešení, používáme však parametrický tvar rovnice přímky výšky a obecný tvar rovnice přímky strany a . Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 17x - 4y - 22 &= 0, \\ x &= 1 + 17s, \\ y &= 8 - 4s, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

tak, že z parametrického tvaru rovnice výšky dosadíme x a y do obecné rovnice přímky strany BC . Pak $17(1 + 17s) - 4(8 - 4s) - 22 = 0$, odkud $s = \frac{37}{305}$ a souřadnice paty výšky jsou

$$P = \left[1 + 17 \cdot \frac{37}{305}; 8 - 4 \cdot \frac{37}{305} \right] \Rightarrow v_a = \sqrt{\left(\frac{17 \cdot 37}{305}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 37}{305}\right)^2} = \frac{37\sqrt{305}}{305}.$$

Dále pokračujeme jako v předchozích řešeních.

Závěr. Obsah trojúhelníku je $\frac{37}{2}$.

Řešení 5 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: délka úsečky – vzdálenost dvou bodů, mocniny, odmocniny, úpravy výrazů, goniometrie

Využijeme vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka: $S = \frac{1}{2}av_a$, kde a je délka strany AB a v_a je výška na stranu a . Vzhledem k tomu, že $v_a = b \sin \gamma$, budeme počítat podle vzorce

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

Dopočítáme $\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}$, kde $\cos \gamma$ vyjádříme z kosinové věty

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \Rightarrow \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Využijeme délky stran vypočítané v prvním řešení $a = |BC| = \sqrt{305}$, $b = |AC| = \sqrt{26}$, $c = |AB| = 13$. Po dosazení dostaneme

$$\cos^2 \gamma = \left(\frac{305 + 26 - 169}{2\sqrt{305} \cdot \sqrt{26}} \right)^2 = \frac{81}{\sqrt{305} \cdot \sqrt{26}}, \quad \text{odkud} \quad \sin \gamma = \sqrt{1 - \frac{81^2}{305 \cdot 26}} = \sqrt{\frac{1369}{305 \cdot 26}}.$$

Dopočítáme

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{\sqrt{305} \cdot \sqrt{26}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1369}{305 \cdot 26}} = \frac{37}{2}.$$

Závěr. Obsah trojúhelníku je $\frac{37}{2}$.

Řešení 6 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vektory, skalární součin, úhel vektorů

Postupujeme podle obdobného vzorce jako v předcházejícím řešení $S = \frac{1}{2}cb \sin \alpha$, který získáme cyklickou záměnou, α však uvažujeme jako úhel vektorů $\vec{AB}$ a $\vec{AC}$. Vypočítáme souřadnice vektorů $\vec{AB} = B - A = (5; 12)$, $\vec{AC} = C - A = (1; -5)$, poté

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{5 - 60}{\sqrt{25 + 144} \cdot \sqrt{1 + 25}} = \frac{-55}{13 \cdot \sqrt{26}}.$$

Dále již řešení pokračuje obdobně jako v předcházejícím způsobu

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(-55)^2}{169 \cdot 26}} = \frac{37}{13 \cdot \sqrt{26}} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{cd \sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{305} \cdot \sqrt{26}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1369}{305 \cdot 26}} = \frac{37}{2}.$$

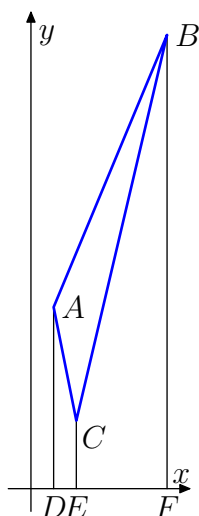
Závěr. Obsah trojúhelníku je $\frac{37}{2}$.

Řešení 7 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obsah lichoběžníku

Zobrazíme trojúhelník ABC v kartézském systému souřadnic a doplníme na lichoběžník $ADFB$ (viz obrázek), který je sjednocením disjunktních rovinných útvarů – lichoběžníků $DECA$, $EFBC$ a trojúhelníku ABC . Body D , E , F jsou průsečíky osy x s po

řadě k ní vedenými kolmicemi z bodů A , C , B .



Obsah trojúhelníku ABC proto vypočteme odečtením obsahu plochy lichoběžníků $DECA$ a $EFCB$ od obsahu lichoběžníku $ADFB$. Využijeme vzorec pro obsah lichoběžníku $S = \frac{1}{2}(a + c)v$, kde a , b jsou základny lichoběžníku a v jeho výška.

$$S_{ABC} = \frac{(20 + 8) \cdot 5}{2} - \frac{(8 + 3) \cdot 1}{2} - \frac{(20 + 3) \cdot 4}{2} = \frac{140 - 11 - 92}{2} = \frac{37}{2}.$$

Závěr. Obsah trojúhelníku je $\frac{37}{2}$.

Řešení 8 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: vektorový součin

Jednoduché řešení nabízí užití velikosti vektorového součinu¹⁾ vektorů $\vec{AB} = (5; 12; 0)$ a $\vec{AC} = (1; -5; 0)$. Vypočítáme obsah trojúhelníka

$$S = \frac{cb \sin \alpha}{2} = \frac{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{|(5; 12; 0) \times (1; -5; 0)|}{2} = \frac{37}{2}.$$

Závěr. Obsah trojúhelníku je $\frac{37}{2}$.

Řešení 9 (úroveň 3²⁾)

Předpokládané znalosti: určitý integrál

Jako doplnění pro náročnější studenty je možno vyjádřit obsah pomocí určitého integrálu. V tomto případě je třeba nalézt předpis lineárních funkcí, jejichž grafy vymezují trojúhelník. Jsou to $y = \frac{12}{5}x + \frac{28}{5}$, $y = \frac{17}{4}x + \frac{11}{2}$ a $y = 13 - 5x$.

¹⁾ Toto řešení je pro danou úlohu zbytečně složité, ale je možno zadat k procvičení integrálního počtu i k zopakování lineární funkce. Řešení však přesahuje rámec RVP.

²⁾ Řešení je jednoduché, ale jedná se o rozšiřující učivo, proto úroveň 3.

Obsah trojúhelníku je tedy

$$\begin{aligned} S &= \int_1^6 \left(\frac{12}{5}x + \frac{28}{5} \right) dx - \int_1^2 (13 - 5x) dx - \int_2^6 \left(\frac{17}{4}x + \frac{11}{2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{6}{5}x^2 + \frac{28}{5}x \right]_1^6 - \left[13x - \frac{5x^2}{2} \right]_1^2 - \left[\frac{17}{8}x^2 - \frac{11}{2}x \right]_2^6 = 70 - \frac{11}{2} - 46 = \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

Závěr. Obsah trojúhelníku je $\frac{37}{2}$.

Metodické poznámky

Úloha může sloužit k opakování a procvičení nejen geometrie, ale i počítání s reálnými čísly. Je žádoucí v průběhu řešení nezaokrouhlovat, počítat bez kalkulačky. Vhodné např. pro skupinovou práci, kde každá skupina má předem určeno, jaký postup zvolit. Řešení lze obměnit cyklickou záměnou. Úlohu lze rozšířit o výpočet dalších prvků v trojúhelníku. Lze též zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků a následně diskutovat výhody a nevýhody zvoleného řešení. Poslední řešení je pro danou úlohu zbytečně složité, ale je možno zadat k procvičení integrálního počtu i k zopakování lineární funkce. Řešení však přesahuje rámec RVP.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: Pythagorova věta, Heronův vzorec, vektorový součin

Úloha

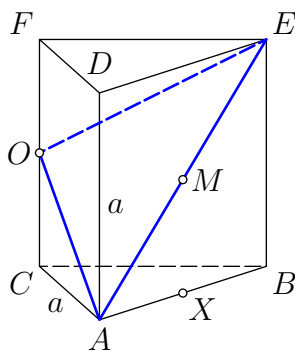
V pravidelném trojbokém hranolu $ABCDEF$ je $|AB| = |AD| = a$, O je střed boční hrany CF . Vypočítejte obsah trojúhelníku AEO .

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, obsah trojúhelníku

Trojúhelník AEO je rovnoramenný se základnou AE . Výška na základnu je $|OM| = |CX|$, kde M je střed úsečky AE , $|CX|$ je výška v rovnostranném trojúhelníku ABC (obr. 1).

$$|AE| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2},$$
$$|OM| = |CX| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$



Obr. 1

Obsah trojúhelníku AEO je

$$S = \frac{|AE| \cdot |OM|}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Závěr. Obsah trojúhelníku AEO je $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Heronův vzorec, Pythagorova věta

Obsah trojúhelníku AEO (obr. 1) vypočítáme pomocí Heronova vzorce:

$$S = \sqrt{s(s - |AE|)(s - |AO|)(s - |EO|)}, \quad \text{kde } s = \frac{|AE| + |AO| + |EO|}{2}.$$

$$|AE| = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a,$$

$$|AO| = |EO| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

$$s = \frac{\sqrt{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a}{2} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})a}{2}.$$

Po dosazení do Heronova vzorce dostáváme:

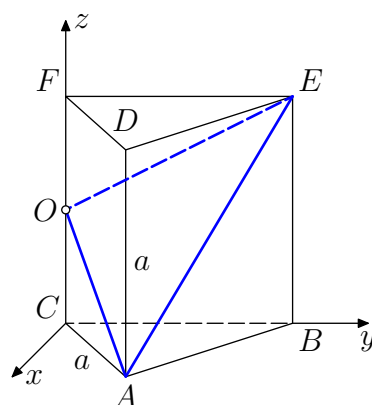
$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{a}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}) \left(\frac{a}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}) - a\sqrt{2} \right)} \\ &\quad \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \frac{a}{2}\sqrt{5} \right) \left(\frac{a}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \frac{a}{2}\sqrt{5} \right)} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}a^2. \end{aligned}$$

Závěr. Obsah trojúhelníku AEO je $\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie v rovině — užití vektorového součinu

Pravidelný trojboký hranol $ABCDEF$ umístíme do pravoúhlé soustavy souřadnic v prostoru, kde $O[0; 0; \frac{a}{2}]$, $E[0; a; a]$, $A[\frac{a}{2}\sqrt{3}; \frac{a}{2}; 0]$ (obr. 2).



Obr. 2

Obsah trojúhelníku AEO vypočítáme pomocí vektorového součinu použitého pro vektory $\mathbf{u} = E - O$, $\mathbf{v} = A - O$

$$\mathbf{u} = (0; a; \frac{a}{2}), \quad \mathbf{v} = (\frac{a}{2}\sqrt{3}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2}),$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(-\frac{3a^2}{4}; \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$S = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{2} = \frac{\sqrt{\frac{9}{16}a^4 + \frac{3}{16}a^4 + \frac{3}{4}a^4}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a^2.$$

Opět dostáváme, že obsah trojúhelníku AEO je roven $\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$.

Metodické poznámky

Řešení 1 je rychlé a elegantní. Největším úskalím pro žáky bude určení výšky na základnu rovnoramenného trojúhelníku AEO , tato výška se rovná výšce v rovnostranném trojúhelníku ABC . Řešení 2 je delší, vhodné pro procvičení Heronova vzorce a úpravy číselných výrazů. Řešení 3 používá prostředků analytické geometrie. Úlohy, které by ukazovaly uplatnění analytické geometrie při řešení podobných stereometrických příkladů, ve středoškolských učebnicích chybí.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: středový a obvodový úhel, sinová věta, vztah mezi sinem a kosinem věta, kružnice

Úloha

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky $2a$ a ramenem délky b . Určete střed a poloměr kružnice jemu opsané.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: goniometrické funkce, sinová věta, vztah mezi sinem a kosinem

V trojúhelníku ABC při obvyklém značení dává sinová věta

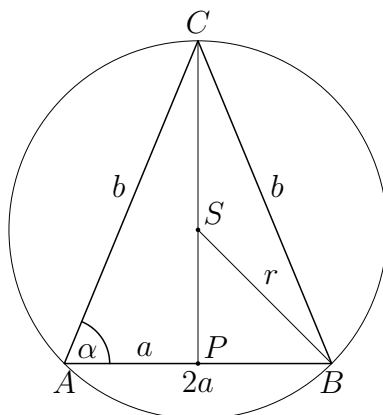
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr opsané kružnice.

V našem případě, viz obr. 1, je tedy

$$\frac{b}{\sin \alpha} = 2r, \quad \text{tj.} \quad r = \frac{b}{2 \sin \alpha}.$$

Střed kružnice S leží na přímkce PC , což je osa strany AB .



Obr. 1

Z trojúhelníku APC vidíme, že

$$\cos \alpha = \frac{a}{b}.$$

K určení $\sin \alpha$ využijeme vztahu

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

(Sinus je kladný, neboť $\alpha < 180^\circ$.) Máme tedy

$$r = \frac{b}{2\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}} = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Závěr. Střed S leží na PC a $|SC| = r$.

Metodické poznámky

Neuvádí-li učitel sinovou větu se vztahem pro výpočet r , ukáže jeho platnost např. takto: V rovnoramenném trojúhelníku ABS , viz obr. 1, je při vrcholu S úhel o velikosti 2γ (středový úhel), při vrcholu A (stejně jako při vrcholu B) pak úhel o velikosti $90^\circ - \gamma$. Ze sinové věty plyne

$$\frac{r}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{c}{\sin 2\gamma},$$

tj.

$$\frac{r}{\cos \gamma} = \frac{c}{2 \sin \gamma \cos \gamma},$$

odkud je už

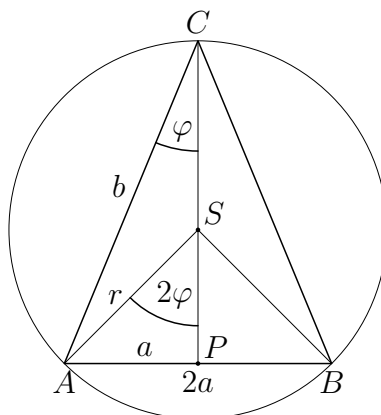
$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

zřejmé.

Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: středový a obvodový úhel, sinus dvojnásobného argumentu

Je zřejmé, viz obr. 2, že úhel ACP je obvodový úhel, příslušný středovému úhlu ASP .



Obr. 2

Z trojúhelníku APS máme

$$\sin 2\varphi = \frac{a}{r}$$

a z trojúhelníku APC

$$\sin \varphi = \frac{a}{b}.$$

Platí

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Pomocí základního vztahu mezi sinem a kosinem dopočítáme

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b},$$

neboť φ je ostrý úhel. Je tedy

$$\frac{a}{r} = \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

a odtud

$$r = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Střed S leží na PC a $|SC| = r$.

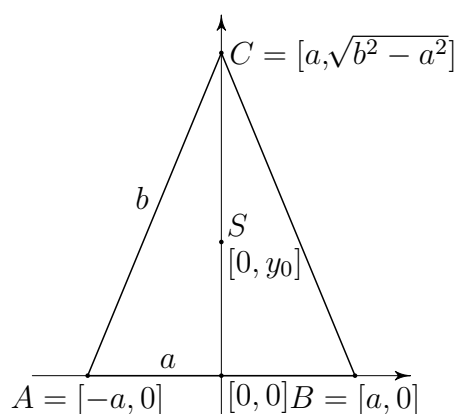
Metodické poznámky

$\cos \varphi$ lze vyjádřit i z pomocného pravoúhlého trojúhelníku. Je-li $\sin \varphi = \frac{a}{b}$, pak odvěsna protilehlá úhlu φ má délku a , přepona délku b a zbývající odvěsna (s použitím Pythagorovy věty) délku $\sqrt{b^2 - a^2}$.

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: rovnice kružnice

Zvolme soustavu souřadnic, viz obr. 3.



Obr. 3

Při takto zvolené soustavě souřadnic má hledaná kružnice má rovnici

$$x^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Do této rovnice dosadíme za x a y postupně souřadnice bodu B a C . Dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + y_0^2 &= r^2, \\ (\sqrt{b^2 - a^2} - y_0)^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti plyne

$$|\sqrt{b^2 - a^2} - y_0| = r,$$

a protože $y_0 < \sqrt{b^2 - a^2}$,

$$y_0 = \sqrt{b^2 - a^2} - r.$$

Dosadíme za y_0 do první rovnosti, máme

$$a^2 + b^2 - a^2 + r^2 - 2r\sqrt{b^2 - a^2} = r^2,$$

odkud

$$r = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Souřadnice y_0 je pak

$$y_0 = \sqrt{b^2 - a^2} - \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{b^2 - 2a^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Závěr. Kružnice opsaná danému trojúhelníku ABC má střed $S = \left[0; \frac{b^2 - 2a^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}\right]$ a poloměr $r = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - a^2}}$.

Metodické poznámky

Není nutné vycházet z rovnice kružnice, lze využít její definice, tj. položit vzdálenost $|SA| = |SB| = |SC| = r$. Dostaneme stejné rovnosti jako při uvedeném postupu. Rovněž nemusíme nic předpokládat o středu kružnice, a její rovnici vzít ve tvaru $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Dosazení bodů A a B dá $x_0 = 0$.

Zdroj: dílo autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: velikost úhlu, souřadnice bodu, směrový úhel přímky, goniometrické funkce

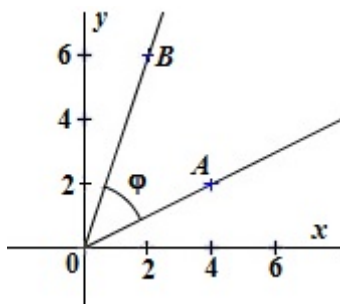
Úloha

V pravouhlé souřadnicové soustavě s počátkem O jsou dány body $A[4; 2]$ a $B[2; 6]$. Sestrojte je a zjistěte velikost φ úhlu AOB .

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: souřadnice bodu v rovině, měření úhlu

Sestrojíme souřadnicové osy, zadané body A a B , polopřímky OA , OB a pomocí úhломěru změříme požadovanou velikost φ úhlu AOB .



Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrnice přímky, směrový úhel, hodnoty tangens na kalkulačce

Vyhotovíme náčrtek jako je v řešení 1. Směrový úhel přímky OA nazveme α , směrový úhel přímky OB nazveme β . Směrnice přímky OA je

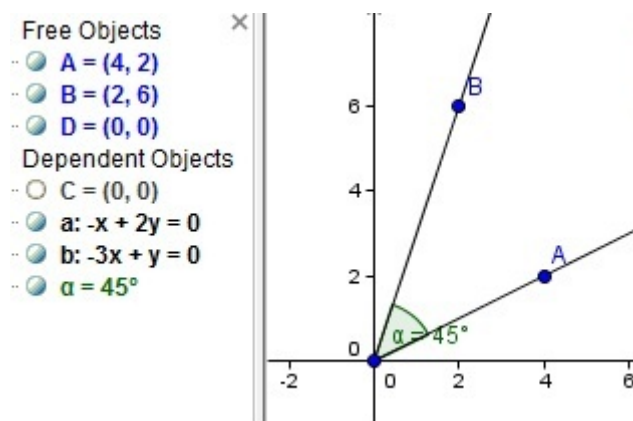
$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{4} = 0,5 \Rightarrow \alpha \doteq 26^{\circ}34',$$

směrnice přímky OB je

$$k_2 = \operatorname{tg} \beta = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \beta \doteq 71^{\circ}34'.$$

Vidíme, že $\alpha < \beta$, takže

$$\varphi = \beta - \alpha \doteq 71^{\circ}34' - 26^{\circ}34' = 45^{\circ}.$$



Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: práce s Geogebrou

Vyvoláme Geogebrou. Do souřadnicové soustavy umístíme body $A[4; 2]$ a $B[2; 6]$, sestrojíme polopřímky OA a OB a zadáme stanovení velikosti úhlu AOB . Výsledek je na obrázku.

Řešení 4 (úroveň 2–3)

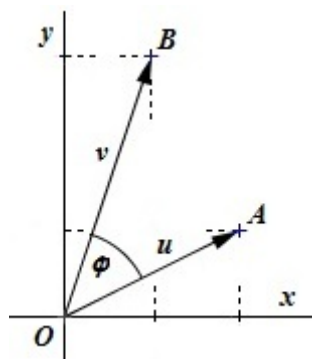
Předpokládané znalosti: vzorce pro goniometrické funkce (tangens rozdílu úhlů)

Vyhotovíme náčrtek jako je v řešení 1. Směrový úhel přímky OA nazveme α , směrový úhel přímky OB nazveme β . Užitím souřadnic bodů dostaneme $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ a $\operatorname{tg} \beta = 3$. Jelikož $\varphi = \beta - \alpha$, platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Řešení 5 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: vektory, skalární součin, Pythagorova věta



Vyhotovíme náčrtek

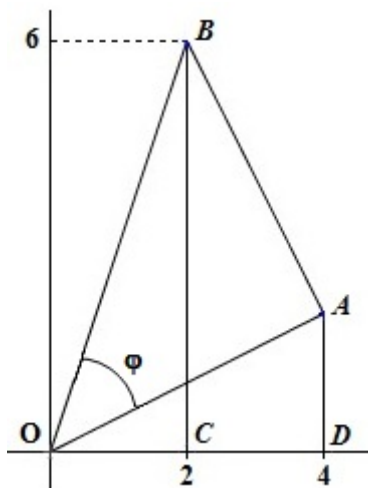
$$\mathbf{u} = A - O = (4; 2), \quad \mathbf{v} = B - O = (2; 6), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 20;$$

platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos \varphi$; podle Pythagorovy věty je $|\mathbf{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, $|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| = 20\sqrt{2}$. Po dosazení do vzorce pro skalární součin máme $20 = 20\sqrt{2} \cos \varphi$; odkud $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, takže $\varphi = 45^\circ$.

Řešení 6 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, výpočet obsahů, rozklady obrazců

Pořídíme si náčrtek a vypočteme obsah trojúhelníku OAB .



Vidíme, že pro obsahy platí

$$S(OAB) = S(OCB) + S(ABCD) - S(ODA);$$

přítom

$$S(OCB) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6, \quad S(ABCD) = \frac{1}{2} (6 + 2) \cdot 2 = 8, \quad S(ODA) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4,$$

takže $S(OAB) = 6 + 8 - 4 = 10$.

Dále vypočteme délky stran OA , OB trojúhelníku OAB (viz též řešení 5).

$$|OA| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}, \quad |OB| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2 \cdot \sqrt{10}.$$

Nyní použijeme goniometrický vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku

$$S(OAB) = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \cdot \sin \varphi.$$

Po dosazení máme $10 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sin \varphi$ a z toho $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, takže $\varphi = 45^\circ$.

Řešení 7 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: věta Pythagorova a věta kosinová

Uvažujeme trojúhelník OAB (viz obrázek v řešení 6) se stranami délky

$$a = |OB| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$b = |OA| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$c = |AB| = \sqrt{(2-4)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Protože hledáme velikost úhlu proti straně AB , použijeme kosinovou větu ve tvaru

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi;$$

dosadíme vypočtené délky stran:

$$20 = 40 + 20 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \cos \varphi,$$

odkud

$$\cos \varphi = \frac{40}{40 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Řešení 8 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: věta Pythagorova, goniometrický výpočet obsahu trojúhelníku, Heronův vzorec

Stejně jako při řešení 7 vypočteme délky stran trojúhelníku OAB

$$a = |OB| = 2\sqrt{10}, \quad b = |OA| = 2\sqrt{5}, \quad c = |AB| = 2\sqrt{5}.$$

Vypočteme $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$, $s - a = 2\sqrt{5} - \sqrt{10}$, $s - b = \sqrt{10} = s - c$.

$$s(s - a)(s - b)(s - c) = (2\sqrt{5} + \sqrt{10}) \cdot (2\sqrt{5} - \sqrt{10}) \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 100,$$

takže podle Heronova vzorce je $S(OAB) = 10$. Další postup je stejný jako při řešení 6.

Metodické poznámky

Tato úloha může sloužit jako ukázka toho, že se na geometrickou úlohu můžeme často dívat z mnoha matematických hledisek. Při řešení číslo 2 a 4 je třeba, aby si žáci udělali podobný náčrtek, jako je zde obrázek při grafickém řešení 1, při řešení 6 a 7 je třeba v náčrtku doplnit další části nezbytné k řešení.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: vzdálenost bodu od přímky

Úloha

Určete vzdálenost bodu $M[1;2]$ od přímky p dané parametricky rovnicemi

$$x = 2 + 2t, \quad y = 4 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, vzdálenost bodu od přímky zadané obecnou rovnicí

Směrový vektor přímky p je $\vec{u} = (2; 1)$, normálový vektor přímky je $\vec{n} = (1; -2)$. Obecná rovnice přímky p má proto tvar

$$p: x - 2y + c = 0.$$

Hodnotu c určíme pomocí bodu $A[2; 4]$, který leží na dané přímce p , tedy platí

$$2 - 2 \cdot 4 + c = 0, \quad \text{odtud} \quad c = 6.$$

Obecná rovnice přímky p je tedy

$$p: x - 2y + 6 = 0.$$

Vzdálenost bodu $M[1; 2]$ od přímky p je

$$v(M, p) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Závěr. Vzdálenost bodu od přímky je $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, vzdálenost bodů

Vzdálenost bodu M od dané přímky p je definována jako vzdálenost bodu M a průsečíku P přímky q , která je kolmá k p a prochází bodem M . Směrový vektor $\vec{u} = (2; 1)$ přímky p je současně normálovým vektorem přímky q k ní kolmé. Obecnou rovnici přímky q proto hledáme ve tvaru

$$q: 2x + y + c = 0.$$

Hodnotu c určíme pomocí bodu M , který leží na dané přímce q , tedy platí

$$2 \cdot 1 + 2 + c = 0, \quad \text{odtud} \quad c = -4.$$

Obecná rovnice je tedy

$$q: 2x + y - 4 = 0.$$

Pro souřadnice průsečíku P přímek p a q tak dostaneme

$$2(2 + 2t) + (4 + t) - 4 = 0, \quad \text{odtud} \quad t = -\frac{4}{5}.$$

Průsečík P má proto souřadnice

$$x = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}, \quad y = 4 + \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5}.$$

Vzdálenost bodů $M[1; 2]$ a $P[\frac{2}{5}; \frac{16}{5}]$ pak je rovna vzdálenosti bodu M od přímky p , tj.

$$v(M, p) = |MP| = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{5} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Metodické poznámky

Průsečík daných přímek lze určit využitím výsledku Řešení 1, tj. jako řešení soustavy dvou lineárních rovnic (obecné rovnice obou přímek)

$$x - 2y + 6 = 0, \quad 2x + y - 4 = 0.$$

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, skalární součin, velikost vektoru, parametrizace vektoru

Třetí možností, jak nalézt průsečík přímek p a q , je zkoumání vzájemné polohy vektoru $\vec{v} = X - M$, kde bod X leží na přímce p , a směrového vektoru $\vec{u} = (2; 1)$ přímky p . Patou kolmice je takový bod přímky p , pro který jsou vektory

$$\vec{v} = X - M = (2 + 2t - 1; 4 + t - 2) = (1 + 2t; 2 + t) \quad \text{a} \quad \vec{u} = (2; 1)$$

vzájemně kolmé, tj. jejich skalární součin je roven nule. Platí proto

$$(1 + 2t) \cdot 2 + (2 + t) \cdot 1 = 0, \quad \text{odtud} \quad t = -\frac{4}{5}.$$

Průsečík můžeme nalézt stejným postupem jako v předchozích řešeních. Pro určení vzdálenosti bodu M od přímky p však stačí určit velikost vektoru $\vec{v}$ pro hodnotu $t = -\frac{4}{5}$.

$$v(M, p) = |\vec{v}|_{(t=-\frac{4}{5})} = \left| \left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right) \right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, velikost vektoru, parametrizace vektoru, minimum kvadratické funkce

Čtvrtou možností je nalezení minima funkce vyjadřující vzdálenost bodu X , který leží na přímce p , a bodu M , tj. nalezení minimální hodnoty pro velikost vektoru

$$\vec{v} = X - M = (1 + 2t; 2 + t),$$

jenž byl popsán v minulém řešení. Velikost vektoru je dána

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1+2t)^2 + (2+t)^2} = \sqrt{1+4t+4t^2+4+4t+t^2} = \sqrt{5t^2+8t+5}.$$

Vzhledem k tomu, že funkce $y = \sqrt{f(t)}$ nabývá pouze nezáporných hodnot, stačí hledat minimum výrazu pod odmocninou. Pomocí „doplnění na čtverec“ můžeme argument odmocniny upravit na tvar

$$\begin{aligned} f(t) &= 5t^2 + 8t + 5 = 5 \left(t^2 + \frac{8}{5}t + 1 \right) = \\ &= 5 \left[\left(t + \frac{4}{5} \right)^2 + \frac{9}{25} \right] = 5 \left(t + \frac{4}{5} \right)^2 + \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

Daná funkce nabývá minimum pro

$$t = -\frac{4}{5}$$

a minimální velikost vektoru (a tím i vzdálenost bodu M od přímky p) tak je

$$v(M, p) = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Řešení 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: minimalizaci lze provést také využitím diferenciálního počtu. Tato metoda sice překračuje rámec RVP, ale je možné žáky seznámit s řešením studenty např. v rámci matematického semináře.

1. derivace dané kvadratické funkce $f(t) = 5t^2 + 8t + 5$ je rovna $f'(t) = 10t + 8$ a příslušný stacionární bod je tedy

$$t = -\frac{4}{5}.$$

Vzhledem ke kladné 2. derivaci $f''(t) = 10 > 0$ nabývá funkce $f(t)$ ve svém stacionárním bodě minimum, a tedy

$$\min \left\{ \sqrt{5t^2 + 8t + 5}, t \in \mathbb{R} \right\} = \sqrt{5 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right)^2 + 8 \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) + 5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Metodické poznámky

Vzdálenost bodu od přímky patří k základním poznatkům analytické geometrie v rovině. Zatímco první řešení vyžaduje pouhé dosazení do vzorce, další řešení nabízejí studentům možnost pochopit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a účelně využívat i jiné matematické prostředky. Analogické postupy lze aplikovat i pro řešení obdobné úlohy v prostoru.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: odchylka vektorů, rovnoběžnost, směrový a normálový vektor, směrnice, odchylka přímek, posunutí

Úloha

Napište rovnici přímky p , která prochází bodem $A[1;3]$ a s přímkou $q: 4y - 7 = 0$ svírá úhel $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: odchylka vektorů, odchylka přímek, normálový vektor, obecný tvar rovnice přímky

Řešíme pomocí obecného tvaru rovnice přímky a vztahu pro úhel vektorů.

Nechť má rovnice hledané přímky p tvar $ax + by + c = 0$. Bod A na ni leží, proto jeho souřadnice rovnici vyhovují a platí $a + 3b + c = 0$. Velikost normálového vektoru $\mathbf{u}$ hledané přímky můžeme zvolit libovolně, pro jednoduchost ji zvolme

$$|u| = |(a; b)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 1.$$

Normálový vektor $\mathbf{v}$ přímky q má souřadnice $\mathbf{v} = (0; 4)$. Odchylka přímek p, q je shodná s odchylkou jejich normálových vektorů

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{|0a + 4b|}{\frac{7}{5}} \quad \text{z čehož} \quad |b| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Po dosazení do rovnice $a^2 + b^2 = 1$ dostaneme $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pokud mají a, b stejná znaménka, vyjde $|c| = 2\sqrt{2}$, pokud mají opačná znaménka je $|c| = \sqrt{2}$. Získáme tak čtyři rovnice, z nichž dvě a dvě jsou ekvivalentní. Hledané rovnice mají po úpravě tvar

$$x + y - 4 = 0 \quad \text{a} \quad x - y + 2 = 0.$$

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: odchylka vektorů, odchylka přímek, směrnice, směrnice tvar rovnice přímky

Řešíme pomocí vztahu pro odchylku přímek z jejich směrnice.

Pro odchylku α přímek $a: y = k_1x + q_1$, $b: y = k_2x + q_2$ platí vztah

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|,$$

kde $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $k_1 = 0$, k_2 je neznámá. Po dosazení dostaneme $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = |k_2|$, z čehož $k_2 = \pm 1$.

Závěr. Rovnice hledaných přímk pak jsou $y = x + q_1$ a $y = -x + q_2$, kde q_1, q_2 vypočteme z podmínky, že bod $A[1; 3]$ leží na obou přímkách. Hledané řešení má tvar:

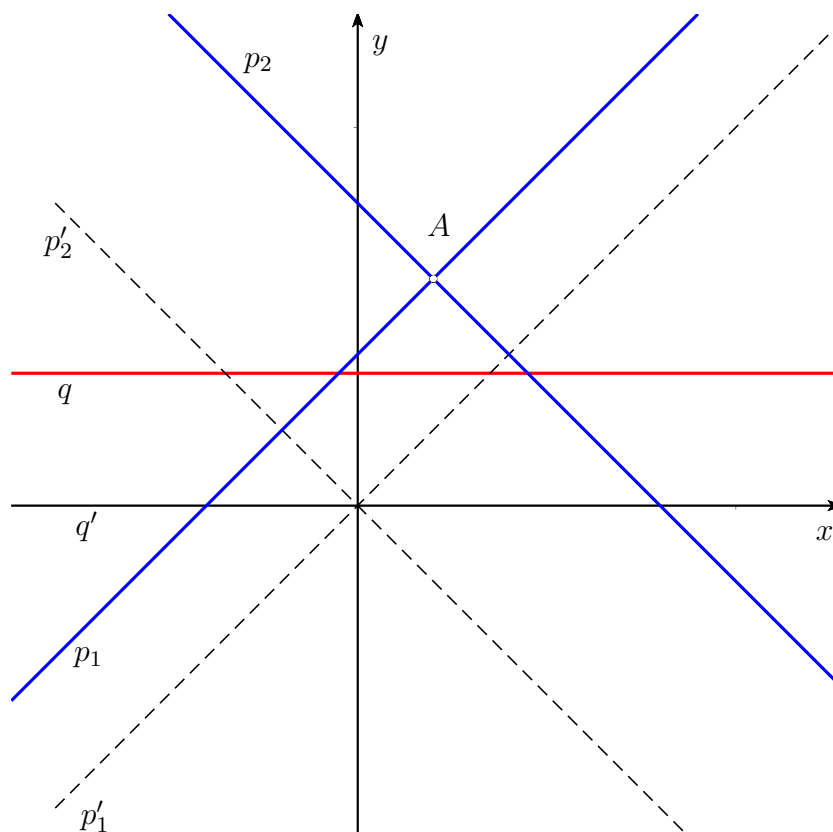
$$y = x + 2 \quad \text{a} \quad y = -x + 4.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: posunutí, odchylka přímek, směrnice, směrniceový tvar rovnice přímky

Využijeme faktu, že směrnice přímky q je $k_q = 0 = \operatorname{tg} \varphi$, tedy $\varphi = 0$. Jde tedy o přímku rovnoběžnou s osou x a procházející bodem $[0; \frac{7}{4}]$. Posuňme přímku $q \rightarrow q'$ tak, aby procházela počátkem (přímka q' svírá s osou x rovněž úhel φ). Zkonstruujeme pomocné přímky p'_1 a p'_2 procházející počátkem a svírající s přímkou q' požadovaný úhel $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Směrnice přímek $k_{p'_1} = \operatorname{tg}(\varphi + \alpha) = 1$ a $k_{p'_2} = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = -1$. Hledané rovnice přímek p_1 a p_2 pak získáme posunutím přímek p'_1 a p'_2 tak, aby procházel bodem A

$$y = x + 2 \quad \text{a} \quad y = -x + 4.$$



Metodické poznámky

Vzhledem k tomu, že bod $A \notin q$, budou takové přímky dvě. Všimněte si, že normálové vektory výše uvedených přímek jsou kolmé, proto i přímky jsou kolmé. Je proto možné druhou přímku najít jako kolmici k první, vedenou bodem A . Druhé řešení je možné použít, pokud ani jedna z přímek není rovnoběžná s osou y (existují jejich směrnice) a úhel α není pravý (existuje jeho tangens). Třetí řešení je možno ukázat krokově například pomocí programu Cabri nebo GeoGebra. Pozice přímky v podstatě nehraje pro výpočet roli, pouze je nutné upozornit na situaci, kdy hledaná přímka není funkcí (je rovnoběžná s osou y). Spolu s konstrukcí je vhodné řešit příklad obecně.

Pokud mají studenti v hodinách matematiky přístup k počítači, mohou sami hledat problematické polohy užívaných přímek.

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Václav Vaněk; vvanek1@seznam.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: bod, přímka, vzdálenost bodu od přímky

Úloha

Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A[3; 6]$ a má od bodu $B[1; 2]$ vzdálenost $v = 4$.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rovnice přímky, vzdálenost bodu od přímky

Předpokládejme, že hledaná přímka p existuje a má rovnici $y = kx + q$. Dosazením souřadnic bodu $A[3; 6]$ do této rovnice obdržíme vztah $6 = 3k + q$, z něho vyjádříme $q = 6 - 3k$, dosadíme zpět $y = kx + 6 - 3k$ a upravíme na obecný tvar $kx - y + 6 - 3k = 0$. Víme, že vzdálenost bodu $M[x_0; y_0]$ od přímky dané v kartézské soustavě souřadnic Oxy rovnicí $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0 \vee b \neq 0$) je vyjádřena vzorcem

$$v(M, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pro bod $B[1; 2]$ a hledanou přímku p : $kx - y + 6 - 3k = 0$ tedy platí

$$\frac{|k \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 6 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 4.$$

Odtud postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{|4 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} &= 4, \\ |2 - k| &= 2\sqrt{k^2 + 1}, \\ 4 - 4k + k^2 &= 4(k^2 + 1), \\ 3k^2 + 4k &= 0, \\ k(3k + 4) &= 0,\end{aligned}$$

odkud

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{4}{3}.$$

Nalezené koeficienty dosadíme do obecné rovnice hledané přímky. Pro $k_1 = 0$ obdržíme $y - 6 = 0$, pro $k_2 = -\frac{4}{3}$ dostaneme $4x + 3y - 30 = 0$.

Závěr. Hledané přímky mají obecné rovnice $y - 6 = 0$ a $4x + 3y - 30 = 0$.

Řešení 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: rovnice přímky, Thaletova kružnice, středová rovnice kružnice

Předpokládejme, že hledaná přímka p existuje. Z bodu B spustíme kolmici q na přímku p a její patu označíme P . Je zřejmé, že pata této kolmice bude také průsečíkem

Thaletovy kružnice τ sestrojené nad průměrem AB a kružnice k se středem v bodě B a poloměrem 4. Střed Thaletovy kružnice S leží ve středu úsečky AB a má souřadnice $S[2; 4]$, velikost poloměru je rovna polovině velikosti úsečky AB tj.

$$r = \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2}}{2} = \sqrt{5}.$$

Kružnice mají středové rovnice

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y-4)^2 &= 5, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 16,\end{aligned}$$

které můžeme zapsat v obecném tvaru

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0. \quad (2)$$

Řešením této soustavy rovnic nalezneme hledané průsečíky. Odečtením (1) od (2) dostaneme $x + 2y - 13 = 0$. Vyjádříme

$$x = 13 - 2y \quad (3)$$

a dosadíme do (1), čímž obdržíme

$$(13 - 2y)^2 + y^2 - 4(13 - 2y) - 8y + 15 = 0,$$

po úpravě

$$5y^2 - 52y + 132 = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice získáme kořeny $y_1 = 6$, $y_2 = \frac{22}{5}$, které dosadíme do (3). Určíme $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{21}{5}$ a hledané průsečíky

$$P_1[1; 6], \quad P_2\left[\frac{21}{5}; \frac{22}{5}\right].$$

Dostáváme tedy dvě přímky.

Přímka p_1 , která je určena body $A[3; 6]$, $P_1[1; 6]$ má normálový vektor $\mathbf{n}_{p_1} = (0; 2)$. Pak může mít rovnici $2y + c = 0$. Konstantu c vypočítáme dosazením souřadnic bodu $A[3; 6]$ do této rovnice. Obdržíme $12 + c = 0$, odkud $c = -12$. Přímka p_1 má tedy rovnici $2y - 12 = 0$, po úpravě $y - 6 = 0$.

Přímka p_2 , která je určena body $A[3; 6]$, $P_2\left[\frac{21}{5}; \frac{22}{5}\right]$ má normálový vektor $\mathbf{n}_{p_2} = (4; 3)$. Pak může mít rovnici $4x + 3y + c = 0$. Konstantu c vypočítáme dosazením souřadnic bodu $A[3; 6]$ do této rovnice. Obdržíme $30 + c = 0$, odkud $c = -30$. Přímka p_2 má tedy rovnici $4x + 3y - 30 = 0$.

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, vzdálenost dvou bodů

Opět budeme předpokládat, že hledaná přímka p existuje. Z bodu B opět spustíme kolmici q na přímku p a její patu označíme $P[m; n]$. V pravoúhlém trojúhelníku ABP určíme délky jeho stran. Délku strany AB vypočítáme jako vzdálenost dvou bodů

$$|AB| = \sqrt{(1-3)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

délka strany BP je ze zadání rovna 4 a délku strany AP vypočítáme z Pythagorovy věty

$$|AP| = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = \sqrt{20 - 16} = 2.$$

Pro vzdálenost bodů AP a BP platí

$$\begin{aligned}\sqrt{(m-3)^2 + (n-6)^2} &= 2, \\ \sqrt{(m-1)^2 + (n-2)^2} &= 4,\end{aligned}$$

kteřé můžeme zapsat v obecném tvaru

$$m^2 + n^2 - 6m - 12n + 41 = 0, \quad (4)$$

$$m^2 + n^2 - 2m - 4n - 11 = 0. \quad (5)$$

Řešením této soustavy rovnic nalezneme hledané průsečíky. Odečtením (4) od (5) dostaneme $m + 2n - 13 = 0$. Vyjádříme

$$m = 13 - 2n \quad (6)$$

a dosadíme do (4), čímž obdržíme

$$(13 - 2n)^2 + n^2 - 6(13 - 2n) - 12n + 41 = 0,$$

po úpravě $5n^2 - 52n + 132 = 0$. Řešením této kvadratické rovnice získáme kořeny $n_1 = 6$, $n_2 = \frac{22}{5}$, které dosadíme do (6). Určíme $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{21}{5}$ a hledané průsečíky

$$P_1 [1; 6], P_2 \left[\frac{21}{5}; \frac{22}{5} \right].$$

Analogickým postupem jako v předchozí úrovni určíme rovnice přímk

$$p_1: y - 6 = 0, p_2: 4x + 3y - 30 = 0.$$

Metodické poznámky

Při řešení je vhodné studentům ukázat souvislosti mezi pojmy Pythagorova věta, vzdálenost dvou bodů v rovině, středová rovnice kružnice, případně tyto vztahy odvodit.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Sedláček Lubomír, Ph.D.; lsedlacekf@fai.utb.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: vzdálenost dvou bodů, analytická geometrie – přímka, kružnice, soustava rovnic

Úloha

V rovině jsou dány body $A = [5; -5]$, $B = [9; 3]$, $C = [3; 1]$. Najděte všechny body roviny stejně vzdálené od bodů A , B , C a určete tuto vzdálenost.

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie lineárních útvarů, parametrický tvar rovnice přímky v rovině, střed úsečky, vzdálenost bodů, řešení soustavy lineárních rovnic.

Od bodů A , B , C má stejnou vzdálenost střed kružnice opsané trojúhelníku ABC , který leží v průsečíku os stran tohoto trojúhelníku. Osa strany AB prochází středem S úsečky AB a je kolmá k této úsečce. Přitom $S = [\frac{5+9}{2}; \frac{-5+3}{2}] = [7; -1]$. Vektor $\overrightarrow{AB} = B - A = (4; 8)$, normálový vektor je kolmý k $(4; 8)$ a skalární součin $(4; 8) \cdot \mathbf{n} = 0$, je tedy rovnoběžný s vektorem $(8; -4) = 4(2; -1)$. Osa strany AB má rovnici

$$\begin{aligned}x &= 7 + t, \\y &= -1 - 2t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Obdobně lze vyjádřit rovnici další strany, např. BC

$$\begin{aligned}x &= 6 + s, \\y &= 2 - 3s, \quad \text{kde } s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}7 + t &= 6 + s, \\-1 - 2t &= 2 - 3s\end{aligned}$$

lze vypočítat např. $t = 0$ nebo $s = 1$. Hledaný průsečík os stran má tedy souřadnice $[7; -1]$.

V tomto případě je tedy střed kružnice trojúhelníku opsané zároveň středem strany AB . Trojúhelník ABC je tedy podle Thaletovy věty pravoúhlý. Vzdálenost

$$|AS| = |BS| = |CS| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Závěr. Od bodů A , B , C má stejnou vzdálenost bod $[7; -1]$. Tato vzdálenost je $2\sqrt{5}$.

Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie lineárních útvarů, obecný tvar rovnice přímky v rovině, střed úsečky, vzdálenost bodů, řešení soustavy lineárních rovnic.

Možno řešit obdobným způsobem jako v prvním případě, rovnice os stran lze zadat v obecném tvaru.

Normálový vektor osy úsečky AB je rovnoběžný se směrovým vektorem této úsečky, tedy $\mathbf{n} = (4; 8) = 4 \cdot (1; 2)$. Obecný tvar rovnice osy úsečky AB je $x + y + c = 0$, po dosazení souřadnic středu $S = [7; -1]$ úsečky AB pak

$$x + y - 6 = 0, \quad (1)$$

obdobně lze zapsat obecnou rovnici osy úsečky BC ve tvaru

$$3x + y - 20 = 0. \quad (2)$$

Řešení soustavy rovnic (1) a (2) vede opět k bodu $[7; -1]$. Výpočet vzdálenosti je totožný s předchozím způsobem.

Závěr. Od bodů A, B, C má stejnou vzdálenost bod $[7; -1]$. Tato vzdálenost je $2\sqrt{5}$.

Řešení 3 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie lineárních útvarů, parametrický i obecný tvar rovnice přímky v rovině, střed úsečky, vzdálenost bodů, řešení soustavy lineárních rovnic

Řešení je obdobou obou předcházejících, pouze rovnice jedné osy strany je vyjádřena ve tvaru parametrickém a druhá ve tvaru obecném.

Z rovnic osy strany

$$\begin{aligned} AB: \quad x &= 7 + t, \\ y &= -1 - 2t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dosazením do rovnice osy strany $BC: 3x + y - 20 = 0$ je $3(7 + t) + (-1 - t) - 20 = 0$, odkud $t = 0$. Dále již je řešení totožné s prvním řešením.

Závěr. Od bodů A, B, C má stejnou vzdálenost bod $[7; -1]$. Tato vzdálenost je $2\sqrt{5}$.

Řešení 4 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rovnice kružnice, soustava rovnic

Opět lze vyjít z toho, že od bodů A, B, C má stejnou vzdálenost střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Rovnici této kružnice lze zapsat ve tvaru

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

kde $S = [m, n]$ a poloměr kružnice je zároveň hledanou vzdáleností. Body A, B, C leží na této kružnici, splňují tedy její rovnici. Jejich dosazením do rovnice kružnice vznikne soustava 3 rovnic o 3 neznámých

$$\begin{aligned}(5 - m)^2 + (-5 - n)^2 &= r^2, \\ (9 - m)^2 + (3 - n)^2 &= r^2, \\ (3 - m)^2 + (1 - n)^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy lze dospět k závěru $m = 7, n = -1, r = \sqrt{20}$.

Závěr. Od bodů A, B, C má stejnou vzdálenost bod $[7; -1]$. Tato vzdálenost je $2\sqrt{5}$.

Řešení 5 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vzdálenost bodů, řešení soustavy rovnic

Do vzorce pro vzdálenost dvou bodů dosadíme postupně souřadnice bodů A, B, C a vyjádříme jejich vzdálenost od bodu $S = [m, n]$. Všechny tyto vzdálenosti se musí rovnat.

$$\sqrt{(5 - m)^2 + (-5 - n)^2} = \sqrt{(9 - m)^2 + (3 - n)^2} = \sqrt{(3 - m)^2 + (1 - n)^2}.$$

Po umocnění získáme stejnou soustavu rovnic jako v předcházejícím způsobu řešení. umocnění je zde ekvivalentní úpravou, neboť všechny odmocňované výrazy jsou nezáporné.

Závěr. Od bodů A, B, C má stejnou vzdálenost bod $[7; -1]$. Tato vzdálenost je $2\sqrt{5}$.

Řešení 6 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: sinová věta, délka úsečky – vzdálenost dvou bodů, úhel vektorů, goniometrické funkce

Tento způsob řešení opět vychází z toho, že od bodů A, B, C má stejnou vzdálenost střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Podle sinové věty pro poloměr kružnice trojúhelníku opsané platí

$$2r = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad (3)$$

kde $a = |BC|$ je délka strany trojúhelníka a $\alpha = |\sphericalangle CAB|$ je velikost vnitřního úhlu protilehlého této straně. Délka strany $a = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$, úhel α lze vypočítat jako úhel vektorů

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{(4; 8) \cdot (-2; 6)}{\sqrt{16 + 64} \cdot \sqrt{4 + 36}} = \frac{-8 + 48}{\sqrt{3200}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zřejmě tedy $\alpha = \frac{\pi}{4}$ a $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, po dosazení výše vypočítaných hodnot do (3) vychází $r = 2\sqrt{5}$. Souřadnice středu pak lze vypočítat z rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{(5 - m)^2 + (-5 - n)^2} &= 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{(3 - m)^2 + (1 - n)^2} &= 2\sqrt{5},\end{aligned}$$

odkud opět $m = 7$ a $n = -1$.

Závěr. Od bodů A, B, C má stejnou vzdálenost bod $[7; -1]$. Tato vzdálenost je $2\sqrt{5}$.

Řešení 7 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: pravoúhlý trojúhelník vzdálenost dvou bodů, úhel vektorů

V tomto konkrétním případě po zjištění, že se jedná o pravoúhlý trojúhelník (což vyplývá např. z 1. způsobu řešení a lze ověřit Pythagorovou větou pro vypočítané délky stran nebo výpočtem velikosti úhlu vektorů $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CV}$), lze vypočítat souřadnice hledaného bodu jako souřadnice středu úsečky $S = [7; -1]$ a jeho vzdálenosti od libovolného bodu, např.

$$\sqrt{(3-7)^2 + (1-(-1))^2} = 2\sqrt{5}.$$

Závěr. Od bodů A, B, C má stejnou vzdálenost bod $[7; -1]$. Tato vzdálenost je $2\sqrt{5}$.

Metodické poznámky

Při prvním způsobu lze použít libovolnou dvojici stran, zvolíme-li strany BC, AC nemusí být zřejmé, že se jedná o pravoúhlý trojúhelník. Zde se jedná o ukázkou řešení soustavy lineárních rovnic různými způsoby. V úloze je procvičována analytická geometrie, goniometrie a řešení soustav rovnic. Snadno lze vytvořit libovolné množství příkladů změnou souřadnic bodů v zadání. Všechny způsoby řešení (kromě posledního způsobu) lze použít pro obecný trojúhelník. V případě obecného trojúhelníku u předposledního způsobu řešení je výhodnější nepočítat velikost úhlu α , ale vzhledem k tomu, že stačí znát hodnotu funkce $\sin \alpha$, lze hned vyjádřit $|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. Vzhledem k tomu, že se jedná o vnitřní úhel v trojúhelníku, tedy úhel $0 < \alpha < \pi$, je $|\sin \alpha| = \sin \alpha$.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: analytická geometrie, vzdálenost bodu od přímky

Úloha

Jsou dány body $A[3; 4]$ a $M[2; 1]$. Určete rovnici přímky, která prochází bodem A , a od bodu M má vzdálenost 1.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obecná rovnice přímky, vztah pro určení vzdálenosti bodu od přímky, řešení rovnic s absolutní hodnotou

Hledáme rovnici přímky r ve tvaru $ax + by + c = 0$, která prochází bodem A , a má od bodu M vzdálenost 1.

Z podmínky, že bod A leží na přímce r , plyne: $3a + 4b + c = 0$. Pro určení vzdálenosti použijeme vztah

$$v(M, r) = \frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

kde $M[m, n]$ a a, b, c jsou koeficienty v obecné rovnici přímky r . Dosadíme a získáme další rovnici

$$1 = \frac{|2a + b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tím získáme soustavu dvou rovnic o třech neznámých. Protože neznámé a, b vyjadřují souřadnice vektoru $\mathbf{n}_r$, můžeme si zvolit jeho velikost a tím soustavu doplnit o třetí potřebnou rovnici. Volíme $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, tedy $a^2 + b^2 = 1$.

Přehledně zapíšeme

$$\begin{aligned} 3a + 4b + c &= 0, \\ 1 &= \frac{|2a + b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ a^2 + b^2 &= 1. \end{aligned}$$

Upravíme

$$\begin{aligned} 3a + 4b + c &= 0, \\ |2a + b + c| &= 1, \\ a^2 + b^2 &= 1. \end{aligned}$$

Rozlišíme dva případy:

a) $2a + b + c \geq 0$. V tomto případě řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3a + 4b + c &= 0, \\ 2a + b + c &= 1, \\ a^2 + b^2 &= 1. \end{aligned}$$

Jejím řešením dostaneme

$$(a, b, c) \in \{(-1; 0; 3), (\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; 0)\}.$$

b) $2a + b + c < 0$. V tomto případě řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}3a + 4b + c &= 0, \\2a + b + c &= -1, \\a^2 + b^2 &= 1.\end{aligned}$$

Jejím řešením dostaneme

$$(a, b, c) \in \{(1; 0; -3), (-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0)\}.$$

Hledané přímky mají tedy rovnice $r_1: -x + 3 = 0$, $r_2: 4x - 3y = 0$. Rovnice přímek, které vzniknou z postupu b) vyjadřují stejné přímky, neboť jsou pouze (-1) násobky rovnic získaných z části a).

Závěr. Hledané přímky mají rovnice $r_1: -x + 3 = 0$, $r_2: 4x - 3y = 0$.

Řešení 2 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: souřadnice vektorů, skalární součin vektorů, řešení soustavy kvadratických rovnic

Hlavní strategie řešení je založena na faktu, že skalární součin dvou navzájem kolmých vektorů je roven 0. Na přímce r , jejíž rovnici hledáme, stanovíme bod X tak, aby úsečka SX byla kolmá na přímkou r a její velikost byla rovné jedné.

Označme souřadnice bodu $X[x, y]$. Zavedeme vektory $\overrightarrow{MX}$, $\overrightarrow{SX}$. Vzhledem k tomu, že body M a X leží na přímce r a úsečka SX je k ní kolmá, platí pro odpovídající skalární součin $\overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{SX} = 0$. Odtud dostaneme první rovnici. Souřadnice obou vektorů jsou $\overrightarrow{MX} = (x - 3, y - 4)$, $\overrightarrow{SX} = (x - 2, y - 1)$ a získaná rovnice má tvar:

$$(x - 3)(x - 2) + (y - 4)(y - 1) = 0.$$

Upravíme $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$. Druhou rovnici získáme z podmínky velikosti úsečky $|SX| = 1$.

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = 1$$

Upravíme $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.

Soustavu zapíšeme přehledně

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 &= 0, \\x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 &= 0.\end{aligned}$$

Od první rovnice odečteme druhou rovnici a získáme rovnici $-x - 3y + 6 = 0$. Vyjádříme x a dosadíme do druhé rovnice. Po úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$5y^2 - 13y + 8 = 0,$$

která má kořeny $y_1 = \frac{8}{5}$, $y_2 = 1$. Hledané body tak jsou $X_1 [\frac{6}{5}; \frac{8}{5}]$, $X_2 [3; 1]$.

Body M , X_1 a M , X_2 určují hledané přímky. Stanovení rovnic obou přímek je již jednoduché. Opět dostaneme rovnice dvou přímek $r_1: -x + 3 = 0$, $r_2: 4x - 3y = 0$.

Závěr. Hledané přímky mají rovnice $r_1: -x + 3 = 0$, $r_2: 4x - 3y = 0$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: rovnice kružnice, tečna ke kružnici vedená vnějším bodem

Další způsob řešení je převod úlohy na úlohu typu vedení tečny z vnějšího bodu ke kružnici. Konkrétně povedeme tečnu r bodem A ke kružnici se středem M a poloměrem jedna.

Rovnice kružnice má tvar $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Bod dotyku označíme $T [p, q]$, potom rovnice tečny r má tvar

$$(p - 2)(x - 2) + (q - 1)(y - 1) - 1 = 0.$$

Dosadíme souřadnice bodu A , kterým tečna určitě prochází. Získáme lineární rovnici

$$(p - 2) + 3(q - 1) - 1 = 0$$

a vyjádříme $p = -3q + 6$. Bod T leží na kružnici, proto musí splňovat její rovnici

$$(p - 2)^2 + (q - 1)^2 = 1.$$

Dosadíme za p výraz $-3q + 6$ a získáme rovnici o jedné neznámé

$$(-3q + 4)^2 + (q - 1)^2 = 1.$$

Upravíme $5q^2 - 13q + 8 = 0$. Je zřejmé, že jsme získali stejnou rovnici jako v druhém případě. Řešení je $q_1 = \frac{8}{5}$, $q_2 = 1$. Hledané body: $T_1 [\frac{6}{5}; \frac{8}{5}]$, $T_2 [3; 1]$. Dosazením do rovnice tečny opět dostaneme rovnice hledaných tečen, resp. hledaných přímek $r_1: -x + 3 = 0$, $r_2: 4x - 3y = 0$.

Závěr. Hledané přímky mají rovnice $r_1: -x + 3 = 0$, $r_2: 4x - 3y = 0$.

Metodické poznámky

Řešení číslo jedna je zcela klasické a vychází ze vztahů, které se povinně do výuky analytické geometrie zařazují. Řešení není logicky těžké, ale je ze všech postupů numericky nejnáročnější. Postup prezentovaný ve druhém řešení je založen na vlastnostech skalárního součinu. Hlavní myšlenka úlohy je relativně jednoduchá, ale pro žáky nezvyklá. Mají problém se zorientovat v propojení operací s vektory a metrikou v analytické geometrii. Způsob třetího řešení je možné použít až po probrání rovnice kružnice. Dalo se očekávat, že druhá a třetí úloha vede na stejnou soustavu rovnic, neboť úkolem je nalezení stejného klíčového bodu (ve druhé úloze X , ve třetí dotkový bod T).

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: vzdálenost bodu od přímky v prostoru

Úloha

Určete vzdálenost bodu $A[0; 2; 3]$ od přímky $p = \{[3 + t; 5 + 2; -t], t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: analytické vyjádření přímky a roviny

Označme ρ rovinu kolmou k přímce p , která prochází bodem A . Normálový vektor roviny ρ odpovídá směrovému vektoru přímky p . Obecná rovnice roviny ρ má pak tvar

$$x + 2y - z + d = 0.$$

Leží-li bod A v rovině ρ , je $d = -1$. Tedy obecná rovnice roviny ρ je

$$x + 2y - z - 1 = 0.$$

Označme P průsečík přímky p a roviny ρ . Souřadnice bodu P získáme řešením soustavy rovnic

$$\rho: x + 2y - z - 1 = 0; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} p: x &= 3 + t; \\ y &= 5 + 2t; \\ z &= -t. \end{aligned} \tag{2}$$

Po dosazení z rovnic (2) parametrického vyjádření přímky p do rovnice (1) obecné rovnice roviny ρ dostaneme rovnici

$$(3 + t) + 2(5 + 2t) - (-t) - 1 = 0,$$

odtud $t = -2$, tedy $P[1; 1; 2]$. Zřejmě platí, že $|Ap| = |AP|$. Vzdálenost $|AP|$ určíme dle známého vztahu pro určení vzdálenosti dvou bodů v prostoru, tj. platí

$$|AP| = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{3}.$$

Závěr. Vzdálenost bodu A od přímky p je $\sqrt{3}$.

Řešení 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: analytické vyjádření přímky, extrémní úlohy

Vzdálenost bodu A od přímky p odpovídá minimální vzdálenosti $|AX|$, kde $X \in p$. Bod $X \in p$, proto $X = [3 + t; 5 + 2t; -t]$, kde $t \in \mathbb{R}$, tedy platí

$$|AX| = \sqrt{(3 + t - 0)^2 + (5 + 2t - 2)^2 + (-t - 3)^2},$$

odtud $|AX| = \sqrt{6t^2 + 24t + 27}$. Doplněním výrazu pod odmocninou na úplný čtverec dostaneme

$$|AX| = \sqrt{6(t+2)^2 + 3}.$$

Výraz $\sqrt{6(t+2)^2 + 3}$ pak nabývá své minimální hodnoty, právě když $t+2 = 0$, tj. $t = -2$. Tedy $|Ap| = \sqrt{3}$.

Závěr. Vzdálenost bodu A od přímky p je $\sqrt{3}$.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: analytické vyjádření přímky a kulové plochy

Uvažujme systém kulových ploch se středem v bodě A . Tento systém kulových ploch je dán rovnicí

$$x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = r^2, \quad \text{kde } r \in \mathbb{R}^+.$$

Hledáme kulovou plochu κ , která má s přímkou p právě jeden společný bod, tj. přímka je její tečnou. Poloměr takové kulové plochy odpovídá vzdálenosti bodu A od přímky p . Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\kappa: x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = r^2; \quad (3)$$

$$p: x = 3 + t;$$

$$y = 5 + 2t; \quad (4)$$

$$z = -t.$$

Po dosazení z rovnic (4) parametrického vyjádření přímky p do rovnice (3) kulové plochy κ a po úpravách dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou t a parametrem r

$$6t^2 + 24t + 27 - r^2 = 0.$$

Dále určíme hodnotu parametru r tak, aby soustava měla právě jedno řešení. Diskriminant D kvadratické rovnice musí být nulový, tj. platí:

$$D = 24^2 - 4 \cdot 6 \cdot (27 - r^2) = 0 \quad (5)$$

Protože r je kladné reálné číslo, vyhovuje kvadratické rovnici (5) pouze jediné řešení a tj. $r = \sqrt{3}$. Poloměr kulové plochy, která má s přímkou p právě jeden společný bod, je $r = \sqrt{3}$.

Závěr. Vzdálenost bodu A od přímky p je $\sqrt{3}$.

Metodické poznámky

Úloha je využitelná při skupinové práci žáků. Úkolem žáků by mohlo být určení různých způsobů řešení, popř. převést tuto situaci z prostoru do roviny a modifikovat uvedené způsoby řešení.

Zdroj:

Petáková, J. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: kružnice, tečna, normála

Úloha

Určete rovnici kružnice se středem $S[1; 2]$, jejíž tečna má rovnici $4x - 3y + 27 = 0$.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: středová rovnice kružnice, řešení kvadratické rovnice

Z rovnice tečny vyjádříme $y = \frac{4}{3}x + 9$ a dosadíme do středové rovnice kružnice

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2,$$

čímž obdržíme

$$(x - 1)^2 + \left(\frac{4}{3}x + 7\right)^2 = r^2.$$

Tuto kvadratickou rovnici dále upravujeme na základní tvar

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{9}x^2 + \frac{56}{3}x + 49 - r^2 &= 0, \\9x^2 - 18x + 9 + 16x^2 + 168x + 441 - 9r^2 &= 0, \\25x^2 - 150x + 450 - 9r^2 &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Protože tečna má s kružnicí jeden společný bod, musí být diskriminant kvadratické rovnice (1) roven nule. Platí

$$D = (-150)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (450 - 9r^2) = 0.$$

Dalšími úpravami postupně dostaneme

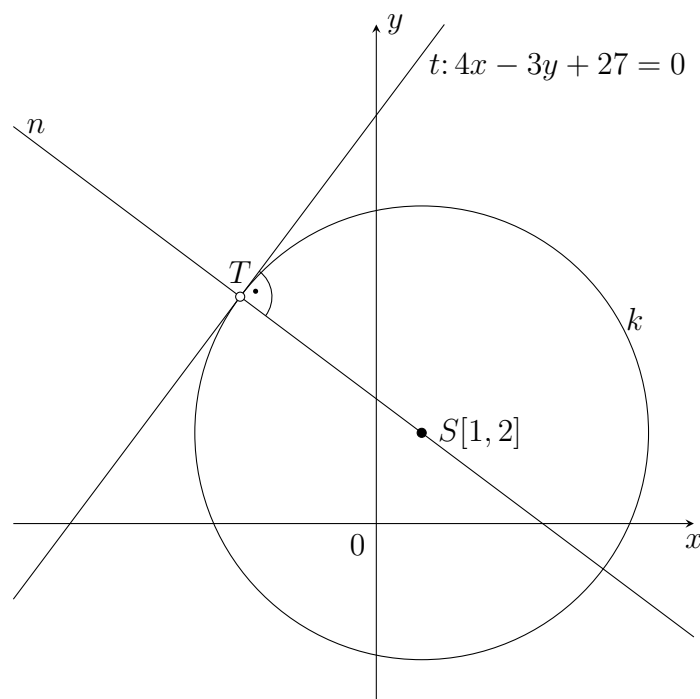
$$\begin{aligned}22\,500 - 45\,000 - 900r^2 &= 0, \\-22\,500 + 900r^2 &= 0, \\r^2 &= 25, \\r &= 5.\end{aligned}$$

Závěr. Hledaná kružnice má středovou rovnici $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, kterou můžeme zapsat v obecném tvaru $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: normála, vzdálenost dvou bodů, středová rovnice kružnice

Je-li rovnice tečny $4x - 3y + 27 = 0$, pak může mít normála rovnici $3x + 4y + c = 0$. Konstantu c určíme z podmínky, že normála musí procházet středem kružnice.



Obr. 1: Grafické znázornění situace

Souřadnice středu kružnice musí tedy vyhovovat rovnici normály. Po dosazení souřadnic středu kružnice do rovnice normály dostáváme

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + c = 0, \quad \text{odtud} \quad c = -11.$$

Normála má tedy rovnici $3x + 4y - 11 = 0$.

Vzhledem k tomu, že bod dotyku T tečny s kružnicí je průsečíkem tečny a normály, nalezneme jeho souřadnice společným řešením jejich rovnic.

Vyřešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

$$4x - 3y + 27 = 0,$$

$$3x + 4y - 11 = 0,$$

pak obdržíme $T[-3; 5]$. Poloměr hledané kružnice

$$r = |ST| \quad \text{tj.} \quad r = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (5 - 2)^2},$$

odkud

$$r = 5.$$

Hledaná kružnice má středovou rovnici $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, kterou můžeme zapsat v obecném tvaru $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

Řešení 3 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vzdálenost bodu od přímky, středová rovnice kružnice

Obecně platí, že vzdálenost bodu $M[x_0, y_0]$ od přímky dané v kartézské soustavě souřadnic Oxy rovnicí $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0 \vee b \neq 0$) je vyjádřena vzorcem

$$v(M, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Vzdálenost tečny t od středu S kružnice je rovna poloměru kružnice. Poloměr hledané kružnice

$$r = v(S, t) \quad \text{tj.} \quad r = \frac{|4 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 27|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}},$$

odkud

$$r = 5.$$

Hledaná kružnice má středovou rovnici $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, kterou můžeme zapsat v obecném tvaru $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

Metodické poznámky

Pokud studenti neznají pojem normála ke kružnici, mohou při Řešení 2 vycházet z definice tečny kružnice a její kolmosti k poloměru kružnice v bodě dotyku. Využívají při tom vztahu mezi normálovým a směrovým vektorem přímky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Sedláček Lubomír, Ph.D.; lsedlacekf@fai.utb.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: tečna ke kružnici, analytická rovnice kružnice

Úloha

Určete obecnou rovnici tečny kružnice

$$k: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0,$$

která prochází bodem $A[2; 1]$.

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, polára přímky, řešení soustavy lineární a kvadratické rovnice

Nejprve upravíme rovnici kružnice na středový tvar

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 5,$$

tj.

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5.$$

K určení tečny lze využít poláru, tj. přímku, která prochází oběma body dotyku. Obecnou rovnici poláry získáme dosazením souřadnic bodu $A[2; 1]$, tj. $x_1 = 2$ a $y_1 = 1$ do rovnice

$$(x - m)(x_1 - m) + (y - n)(y_1 - n) = r^2,$$

kde m a n jsou souřadnice středu a r poloměr kružnice k . Rovnice poláry je tedy

$$(x - 3)(2 - 3) + (y + 2)(1 + 2) = 5,$$

tj.

$$-x + 3y + 4 = 0.$$

Dosadíme-li $x = 3y + 4$, do rovnice kružnice, dostaneme kvadratickou rovnici:

$$(3y + 4)^2 + y^2 - 6(3y + 4) + 4y + 8 = 0,$$

tj.

$$10y^2 + 10y = 0.$$

Prvním řešením je $y_1 = 0$ a příslušné $x_1 = 3 \cdot 0 + 4 = 4$, druhé je potom $y_2 = -1$ a příslušné $x_2 = 3 \cdot (-1) + 4 = 1$.

Závěr. První tečna tedy prochází body $A[2; 1]$ a $T_1[4; 0]$ a má příslušnou rovnici

$$x + 2y - 4 = 0.$$

Druhá tečna prochází body $A[2, 1]$ a $T_2[1, -1]$ a má rovnici

$$2x - y - 3 = 0.$$

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obecná rovnice kružnice, řešení soustavy dvou kvadratických rovnic, směrový a normálový vektor přímky

Bod dotyku tečny s kružnicí leží na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou SA jako nad průměrem. Střed kružnice k je v bodě $S[3; -2]$. Střed Thaletovy kružnice je proto v bodě $S_T[\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}]$. Poloměr Thaletovy kružnice je pak

$$r_T = |SS_T| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Thaletova kružnice má proto středový tvar

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

a obecnou rovnici

$$x^2 + y^2 - 5x + y + 4 = 0.$$

Body dotyku tečny ke kružnici proto získáme jako průsečík kružnice k a příslušné Thaletovy kružnice, tj. jako řešení soustavy

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 &= 0 \\x^2 + y^2 - 5x + y + 4 &= 0.\end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic získáme lineární rovnici

$$-x + 3y + 4 = 0.$$

Další postup je stejný jako v předchozím způsobu řešení.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: soustava lineární a kvadratické rovnice s reálným parametrem, směrnice tvar přímky

Přímka, která prochází bodem $A[2; 1]$, má rovnici vyjádřenou pomocí směrnice tvaru

$$y - 1 = k(x - 2), \quad \text{tj.} \quad y = kx + (1 - 2k).$$

Má-li tato přímka být tečnou dané kružnice, musí mít soustava rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 &= 0, \\y &= kx + (1 - 2k)\end{aligned}$$

s reálným parametrem k právě jedno řešení.

Dosadíme-li do rovnice kružnice za neznámou y z rovnice přímky, dostáváme kvadratickou rovnici

$$x^2 + (kx + (1 - 2k))^2 - 6x + 4(kx + (1 - 2k)) + 8 = 0,$$

kterou lze upravit na tvar

$$(k^2 + 1)x^2 + (-4k^2 + 6k - 6)x + (4k^2 - 12k + 13) = 0.$$

Pro diskriminant D této kvadratické rovnice pak nutně platí

$$0 = D = (-4k^2 + 6k - 6)^2 - 4(k^2 + 1)(4k^2 - 12k + 13) = 16k^2 - 24k - 16$$

(soustava má právě jedno řešení). Kořeny poslední rovnice jsou čísla

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -\frac{1}{2}.$$

První hledaná tečna má rovnici ve směnicovém tvaru

$$y = 2x - 3$$

a druhá

$$y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

což po úpravě dává stejný výsledek jako v předcházejících řešeních.

Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: parametrické vyjádření kružnice, skalární součin vektorů, goniometrické rovnice

Úpravou obecné rovnice kružnice na středový tvar získáme souřadnice středu kružnice k , tj. $S[3; -2]$, a velikost poloměru $r = \sqrt{5}$. Souřadnice libovolného bodu X kružnice k pak můžeme vyjádřit ve tvaru

$$x = x_S + r \cos \varphi, \quad y = y_S + r \sin \varphi,$$

kde x_S a y_S jsou souřadnice středu S kružnice k , r její poloměr kružnice a φ je vhodný úhel. Platí tedy

$$x = 3 + \sqrt{5} \cos \varphi, \quad y = -2 + \sqrt{5} \sin \varphi.$$

Má-li být X bodem dotyku tečny ke kružnici k , jsou oba vektory

$$\begin{aligned} \vec{u} &= X - A = (1 + \sqrt{5} \cos \varphi; -3 + \sqrt{5} \sin \varphi), \\ \vec{v} &= X - S = (\sqrt{5} \cos \varphi, \sqrt{5} \sin \varphi) \end{aligned}$$

navzájem kolmé, tj. pro jejich skalární součin dostaneme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Platí tedy

$$\sqrt{5} \cos \varphi + 5 \cos^2 \varphi - 3\sqrt{5} \sin \varphi + 5 \sin^2 \varphi = 0,$$

tj.

$$\sqrt{5} \cos \varphi - 3\sqrt{5} \sin \varphi = -5.$$

Vydělením celé rovnice číslem $\sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-3\sqrt{5})^2} = 5\sqrt{2} \neq 0$ dostaneme

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \cos \varphi - \frac{3\sqrt{10}}{10} \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Uvažujme úhel $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, pro který platí

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \sin \psi = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Danou rovnici lze poté přepsat do tvaru

$$\cos(\psi + \varphi) = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pro řešení φ této rovnice platí buď

$$\psi + \varphi = \frac{3}{4}\pi, \quad \text{nebo} \quad \psi + \varphi = \frac{5}{4}\pi.$$

V prvním případě je tedy

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \left(\frac{3}{4}\pi - \psi \right) = \cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) \cos \psi + \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \sin \psi = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ \sin \varphi &= \sin \left(\frac{3}{4}\pi - \psi \right) = \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \cos \psi - \cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) \sin \psi = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Bod dotyku tečny s kružnicí k má proto souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 3 + \sqrt{5} \cos \varphi = 3 + \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 4, \\ y &= -2 + \sqrt{5} \sin \varphi = -2 + \sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0 \end{aligned}$$

a příslušná tečna má rovnici

$$x + 2y - 4 = 0.$$

Ve druhém případě je tedy

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos \left(\frac{5}{4}\pi - \psi \right) = \cos \left(\frac{5}{4}\pi \right) \cos \psi + \sin \left(\frac{5}{4}\pi \right) \sin \psi = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ \sin \varphi &= \sin \left(\frac{5}{4}\pi - \psi \right) = \sin \left(\frac{5}{4}\pi \right) \cos \psi - \cos \left(\frac{5}{4}\pi \right) \sin \psi = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Příslušný bod dotyku má proto souřadnice

$$x = 3 + \sqrt{5} \cos \varphi = 3 + \sqrt{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) = 1,$$

$$y = -2 + \sqrt{5} \sin \varphi = -2 + \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = -1$$

a příslušná tečna má rovnici

$$2x - y - 3 = 0.$$

Metodické poznámky

První dvě řešení vycházejí ze základních poznatků analytické geometrie, třetí řešení využívá souvislosti mezi řešením soustavy rovnic a vzájemnou polohou geometrických útvarů. Poslední postup je založen na parametrizaci kružnice a na vlastnostech skalárního součinu. Tato metoda sice překračuje rámec RVP, ale je možné seznámit s řešením studenty např. v rámci matematického semináře.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: analytické vyjádření přímky v rovině, analytické vyjádření kružnice

Úloha

Napište obecnou rovnici tečny kružnice $k: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ v jejím bodě $T[-1; 3]$.

Řešení 1 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: úprava obecné rovnice kružnice na středový tvar, vzorec pro tečnu kružnice v jejím daném bodě

Nejdříve upravíme rovnici kružnice $k(S; r)$ na středový tvar, tj. „doplníme na čtverec“

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 20 + 4 + 1, \\(x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 25.\end{aligned}$$

Získáme tak středovou rovnici kružnice o středu $S[2; -1]$ a poloměru $r = 5$.

Vzorec pro tečnu kružnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ v jejím bodě $T[t_1; t_2]$ je

$$(t_1 - m)(x - m) + (t_2 - n)(y - n) = r^2.$$

Pro danou kružnici k a její daný bod T to znamená

$$\begin{aligned}(-1 - 2)(x - 2) + (3 + 1)(y + 1) &= 25, \\3x - 4y + 15 &= 0.\end{aligned}$$

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: úprava obecné rovnice kružnice na středový tvar, základní vlastnost tečny kružnice, obecná rovnice přímky

Nejdříve upravíme rovnici kružnice $k(S; r)$ na středový tvar (viz Řešení 1)

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25, \quad S[2; -1], \quad r = 5.$$

Tečna kružnice je kolmá k poloměru, který spojuje bod dotyku se středem kružnice, neboli vektor $\overrightarrow{ST}$ je normálovým vektorem tečny t kružnice $k(S; r)$ v jejím bodě T

$$\mathbf{n}_t = \overrightarrow{ST} = T - S = (3; 4).$$

Souřadnice normálového vektoru $\overrightarrow{n}_t$ jsou koeficienty a, b v obecné rovnici $ax + by + c = 0$ tečny t : $3x + 4y + c = 0$. Koeficient c určíme z podmínky, že bod T je bodem tečny t

$$T \in t \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 15.$$

Řešení 3 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: derivace funkce určené implicitně, geometrický význam derivace, směrnicový tvar rovnice přímky

Derivujeme implicitní funkci $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$

$$2x + 2yy' - 4 + 2y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2-x}{y+1}.$$

Směrnice tečny t grafu funkce je rovna hodnotě první derivace funkce v bodě dotyku T

$$k_t = y'(T) = \frac{3}{4}.$$

Koeficient q do směrnicového tvaru $y = kx + q$ rovnice tečny t určíme z podmínky, že bod T je bodem tečny t

$$T \in t \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{3}{4} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{15}{4}.$$

Směrnicový tvar rovnice tečny t je $y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$, který jednoduchými úpravami převedeme na obecnou rovnici $3x - 4y + 15 = 0$.

Závěr. Obecná rovnice tečny kružnice $k: x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ v jejím bodě $T[-1; 3]$ je $3x - 4y + 15 = 0$.

Metodické poznámky

Před řešením úlohy je vhodné: připomenout pojem kružnice jako množinu bodů dané vlastnosti, tečnu kružnice v souvislosti se vzájemnou polohou přímky a kružnice, zopakovat středovou a obecnou rovnici kružnice a převody mezi nimi, zopakovat různá analytická vyjádření přímky v rovině a převody mezi nimi, přesvědčit se, zda je bod T bodem kružnice k . Jednotlivá řešení odpovídají různým matematickým vyspělostem studentů. První dvě řešení spadají do učiva uvedeného v RVP, třetí řešení je možné uvést ve třídách, v nichž se vyučuje diferenciální počet, resp. v matematickém semináři.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Eva Pomykalová; eva.pomykalova@email.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: odchylka přímek v rovině

Úloha

Je dána přímka $p: x\sqrt{3} + 3y + 15 = 0$ a bod $A[-3; 0]$. Určete rovnici přímky, která prochází bodem A a s přímkou p svírá úhel 60° .

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: obecná rovnice přímky, vztah pro určení odchylky dvou přímek, řešení rovnic s absolutní hodnotou.

Hledáme rovnici přímky r ve tvaru $ax + by + c = 0$, která prochází bodem A a svírá s přímkou p úhel 60° .

Z podmínky, že bod A leží na přímce p , plyne $-3a + c = 0$. Odchylku obou přímek určíme pomocí normálových vektorů $\mathbf{n}_p(\sqrt{3}, 3)$, $\mathbf{n}_r(a, b)$ užitím vzorce pro skalární součin

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_r|}{|\mathbf{n}_p| \cdot |\mathbf{n}_r|}.$$

Po dosazení dostáváme vztah

$$\cos 60^\circ = \frac{|a\sqrt{3} + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{12}},$$

který upravíme na tvar

$$\frac{1}{2} = \frac{|a + \sqrt{3}b|}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Získáme tak soustavu dvou rovnic o třech neznámých.

Protože neznámé a, b vyjadřují souřadnice vektoru $\mathbf{n}_r$, můžeme si zvolit jeho velikost a tím soustavu doplnit o třetí potřebnou rovnici. Volíme $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, tedy $a^2 + b^2 = 1$.

Dostáváme tak po úpravě soustavu

$$\begin{aligned} -3a + c &= 0, \\ 1 &= |a + \sqrt{3}b|, \\ a^2 + b^2 &= 1. \end{aligned}$$

Pro odstranění absolutních hodnot uvažujeme dva případy

- a) Pokud $a + \sqrt{3}b = 1$, potom dosazením $a = 1 - \sqrt{3}b$ do třetí rovnice dostaneme $(1 - \sqrt{3}b)^2 + b^2 = 1$, což upravíme na tvar

$$4b^2 - 2b\sqrt{3} = 0$$

a vyřešíme. Pak získáme po dosazení $a = 1 - \sqrt{3}b$, $c = 3a$ dvě řešení

$$(a, b, c) \in \left\{ (1; 0; 3), \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}\right) \right\}.$$

b) Pokud $a + \sqrt{3}b = -1$, potom dosazením $a = -1 - \sqrt{3}b$ do třetí rovnice dostaneme $(-1 - \sqrt{3}b)^2 + b^2 = 1$, což upravíme na tvar

$$4b^2 + 2b\sqrt{3} = 0$$

a vyřešíme. Pak získáme po dosazení $a = -1 - \sqrt{3}b$, $c = 3a$ dvě řešení

$$(a, b, c) \in \left\{ (-1; 0; -3), \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right) \right\}.$$

Závěr. Existují dvě hledané přímky $r_1: x + 3 = 0$, $r_2: -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2} = 0$. Rovnice přímek, které vzniknou v části b) vyjadřují tytéž přímky, neboť jsou pouze násobky rovnic získaných z části a).

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrnice rovnice přímky, vztah pro určení odchylky dvou přímek pomocí směrnic, řešení rovnic s absolutní hodnotou.

Převědeme rovnici přímky p do směrnice tvaru $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 5$. Hledáme rovnici přímky r vyjádřenou ve směrnice tvaru $y = kx + q$. Využijeme vzorec pro výpočet odchylky přímek ze směrnic přímek

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Dosadíme a získáme rovnici s absolutní hodnotou o jedné neznámé.

$$\sqrt{3} = \left| \frac{k + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}k} \right|$$

Pro odstranění absolutní hodnoty uvažujeme dva případy

$$\text{a) } \sqrt{3} = \frac{k + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}k}.$$

Tato rovnice má řešení $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Proto úloze vyhovuje přímka o rovnici $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + c$, dosadíme souřadnice bodu A , určíme konstantu c a dostaneme rovnici hledané přímky $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$, kterou ještě převedeme na obecný tvar

$$x - \sqrt{3}y + 3 = 0.$$

$$\text{b) } -\sqrt{3} = \frac{k + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}k}.$$

Úpravou dostaneme rovnici $0k = 4$, která nemá řešení.

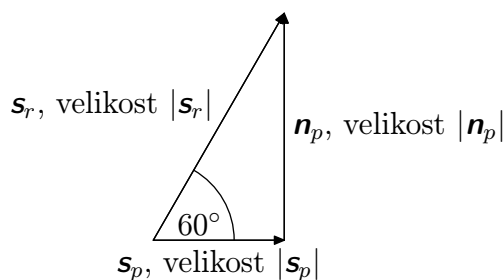
Ovšem druhá hledaná přímka existuje, je to případ tzv. přímky bez směrnice. Každá taková přímka je rovnoběžná s osou y . Vybereme tu, která prochází bodem A . Získáme rovnici $x + 3 = 0$.

Závěr. Hledané přímky mají rovnice $r_1: x + 3 = 0$, $r_2: x - \sqrt{3}y + 3 = 0$.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, součet vektorů.

Hledanou přímku označíme r . Následující způsob řešení je velmi zajímavý. Využijeme součet vektorů. Provedeme součet směrového a normálového vektoru přímky p tak, aby směrový vektor hledané přímky svíral se směrovým vektorem zadané přímky požadovaný úhel 60° . Toho dosáhneme úpravou velikosti normálového vektoru.



Obr. 1

Celou situaci velmi přesně dokumentuje obrázek 1. Označíme $s_p(u, v)$ směrový vektor přímky p , potom normálový vektor je $n'_p(-v, u)$. Požadovanou velikost normálového vektoru dosáhneme tak, že souřadnice vynásobíme hodnotou $\operatorname{tg} \varphi$, tedy $n_p(-v \operatorname{tg} \varphi, u \operatorname{tg} \varphi)$. Směrový vektor přímky r dostaneme součtem a rozdílem obou vektorů.

Konkrétně pro zadanou úlohu

$$s_p(3; -\sqrt{3}), \quad n_p(\sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ; 3 \operatorname{tg} 60^\circ) = (3; 3\sqrt{3}).$$

Pro směrový vektor přímky r platí

- $s_r = s_p + n_p$, po dosazení $s_r(6; 2\sqrt{3})$. Normálový vektor přímky r má souřadnice $n_r(2\sqrt{3}; -6)$ $(1; -\sqrt{3})$. Potom hledaná rovnice přímky má opět tvar $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$.
- $s_r = s_p - n_p$, po dosazení $s_r(0; -4\sqrt{3})$. Normálový vektor přímky r má souřadnice $n_r(-4\sqrt{3}, 0)$ $(1, 0)$. Potom hledaná rovnice přímky má opět tvar $x + 3 = 0$.

Závěr. Hledané přímky mají rovnice $r_1: x + 3 = 0$, $r_2: x - \sqrt{3}y + 3 = 0$.

Metodické poznámky

Řešení číslo jedna je zcela klasické a vychází ze vztahů, které se povinně do výuky analytické geometrie zařazují. Řešení není logicky těžké, je ze všech postupů numericky nejnáročnější. Další postup prezentovaný ve druhém řešení vychází ze vzorce, který je zařazován do rozšiřující látky. Paradoxně je numericky jednodušší. Poslední postup je numericky nejjednodušší. Vyžaduje ovšem porozumění problematice vektorových operací. Postup je spíše určen pro nadané žáky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: tečna kružnice daného směru

Úloha

Určete obecnou rovnici tečny kružnice

$$k: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0,$$

která je rovnoběžná s přímkou

$$p: 2x - y + 5 = 0.$$

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, řešení soustavy lineární a kvadratické rovnice

Středem kružnice vedeme přímku q , která je kolmá k přímce p . Tato přímka protne kružnici v bodech, které jsou body dotyku hledaných tečen. Normálový vektor přímky p je

$$\vec{n}_p = (2; -1),$$

normálový vektor přímky q kolmé k přímce p je

$$\vec{n}_q = (1; 2).$$

Přímka prochází bodem $S[3; -2]$, proto její obecná rovnice má tvar

$$x + 2y + 1 = 0.$$

Průsečíky této přímky dostaneme po dosazení $x = -2y - 1$ do rovnice kružnice, tj.

$$((-2y - 1) - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5,$$

odkud po úpravě dostaneme

$$5y^2 + 20y + 15 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má reálné kořeny $y_1 = -1$ a $y_2 = -3$.

Závěr. Kořenu y_1 odpovídá bod dotyku $T_1[1; -1]$ a příslušná tečna má normálový vektor stejný jako $\vec{n}_p = (2; -1)$, proto její obecná rovnice je

$$2x - y - 3 = 0,$$

kořenu y_2 odpovídá bod dotyku $T_2[5; -3]$ a příslušná tečna má obecnou rovnici

$$2x - y - 13 = 0.$$

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, řešení soustavy lineární a kvadratické rovnice s parametrem

Přímka, která je rovnoběžná se zadanou přímkou p , má obecnou rovnici

$$2x - y + c = 0,$$

kde c je vhodné reálné číslo. Má-li být taková přímka tečnou kružnice, musí mít soustava rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 &= 0, \\ 2x - y + c &= 0\end{aligned}$$

právě jedno řešení. Dosadíme-li $y = 2x + c$ do rovnice kružnice, dostaneme

$$x^2 + (2x + c)^2 - 6x + 4(2x + c) + 8 = 0.$$

Po úpravě máme tedy

$$5x^2 + (4c + 2)x + (c^2 + 4c + 8) = 0.$$

Pro diskriminant této kvadratické rovnice s neznámou x platí

$$0 = D = (4c + 2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (c^2 + 4c + 8) = -4c^2 - 64c - 156 = -4(c^2 + 16c + 39).$$

Kořeny poslední kvadratické rovnice s neznámou c jsou $c_1 = -3$ a $c_2 = -13$. Jim pak po řadě odpovídají rovnice tečen

$$2x - y - 3 = 0 \quad \text{a} \quad 2x - y - 13 = 0.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrový a normálový vektor přímky, vzdálenost bodu od přímky

Aby byla přímka tečnou, musí být její vzdálenost od středu kružnice (rozumíme tím totéž jako vzdálenost středu kružnice od přímky) rovna poloměru kružnice. Středový tvar kružnice k je

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5.$$

Protože kružnice k má poloměr $r = \sqrt{5}$, musí platit, že vzdálenost středu kružnice $S[3; -2]$ od přímky $2x - y + c = 0$ je rovna $r = \sqrt{5}$. Platí tedy

$$\frac{|2 \cdot 3 - (-2) + c|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}.$$

Po odstranění zlomku získáváme rovnici s absolutní hodnotou

$$|c + 8| = 5,$$

která má řešení

$$c_1 = -8 - 5 = -13, \quad c_2 = -8 + 5 = -3$$

a příslušné rovnice tečen jsou

$$2x - y - 3 = 0 \quad \text{a} \quad 2x - y - 13 = 0.$$

Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rovnice tečny kružnice v daném bodě, řešení soustavy lineární a kvadratické rovnice

Je-li $T[x_T, y_T]$ bod dotyku tečny ke kružnici k , pak

$$(x_T - 3)^2 + (y_T + 2)^2 = 5$$

a tečna v tomto bodě je

$$(x - 3)(x_T - 3) + (y + 2)(y_T + 2) = 5.$$

Normálový vektor takové tečny je

$$\vec{n}_T = (x_T - 3, y_T + 2).$$

Má-li tato tečna být rovnoběžná s přímkou p , musí kolíneární s vektorem (tj. být násobkem vektoru)

$$\vec{n}_p = (2; -1).$$

Musí proto platit

$$\frac{(x_T - 3)}{2} = \frac{(y_T + 2)}{-1},$$

tj.

$$x_T + 2y_T + 1 = 0.$$

Řešením příslušné soustavy rovnic

$$\begin{aligned} (x_T - 3)^2 + (y_T + 2)^2 &= 5, \\ x_T + 2y_T + 1 &= 0 \end{aligned}$$

dostáváme dva body dotyku $T_1[1; -1]$ a $T_2[5; -3]$ a příslušné tečny

$$2x - y - 3 = 0 \quad \text{a} \quad 2x - y - 13 = 0.$$

Metodické poznámky

Tečna kružnice patří k základním poznatkům analytické geometrie v rovině. Každé z řešení vyžaduje jiný přístup k nalezení tečny, poslední z postupů nabízí studentům možnost pochopit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a účelně využívat i jiné matematické prostředky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: odchylka vektorů

Úloha

Určete odchylku vektorů $\mathbf{u} = (2; 3)$ a $\mathbf{v} = (5; -1)$.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: skalární součin vektorů, velikost vektoru

Dosadíme-li souřadnice vektorů do vztahu pro kosinus úhlu, dostaneme

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{7\sqrt{2}}{26}.$$

Velikost příslušného úhlu tedy je přibližně $\varphi \doteq 67^\circ 37'$.

Závěr. Úhel mezi vektory je přibližně $67^\circ 37'$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kosinová věta, vzdálenost bodů

Umístíme-li počátek obou vektorů do počátku souřadnicové soustavy $A[0; 0]$, pak koncové body vektorů jsou v bodech $B[2; 3]$ a $C[5; -1]$. Odchylka vektorů je pak rovna velikosti úhlu BAC v trojúhelníku ABC . Velikosti příslušných stran trojúhelníku jsou

$$a = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5, \\ b = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}, \quad c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Z kosinové věty pak snadno dostaneme

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{26 + 13 - 25}{26\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{26}.$$

Velikost příslušného úhlu tedy je přibližně $\varphi \doteq 67^\circ 37'$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vzdálenost bodu od přímky, goniometrické funkce

Stejně jako v předchozím postupu umístíme oba vektory do počátku souřadnicové soustavy, získáme polohu bodů $A[0; 0]$, $B[2; 3]$ a $C[5; -1]$. Obecná rovnice přímky AC je

$$x + 5y = 0.$$

Vzdálenost bodu B od této přímky je

$$v_b = \frac{2 + 5 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{17\sqrt{26}}{26}.$$

Pro sinus úhlu α (při obvyklém označení prvků v trojúhelníku ABC) pak platí

$$\sin \alpha = \frac{v_b}{c} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

a je tedy přibližně $\alpha \doteq 67^\circ 37'$.

Metodické poznámky

K výsledku lze, jak je vidět, dojít více způsoby. Využití různých přístupů nabízí studentům možnost pochopit souvislosti mezi jednotlivými pojmy a účelně využívat i jiné matematické prostředky.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: kružnice, kruh, tečny, obsahy, goniometrické funkce, integrace

Úloha

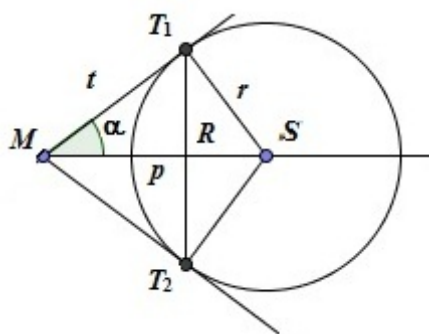
Je dána kružnice $k = (S; r)$ a bod M tak, že $|SM| = p$. Dotykové body tečen z bodu M ke kružnici k jsou T_1, T_2 .

- Vypočtete obsah P trojúhelníku MT_1T_2 . Vyčíslete jeho hodnotu pro $r = 3, p = 5$.
- Kolik % tohoto trojúhelníku leží v daném kruhu?

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: podobnost, Eukleidovy věty, obsah kruhové výseče

Označíme $|MT_1| = |MT_2| = t$, $|RT_1| = |RT_2| = q$, $|MR| = p_1$, $|RS| = p_2$. Vidíme, že $p_1 + p_2 = p$, $P = q \cdot p_1$. V daném kruhu leží x procent trojúhelníku MT_1T_2 .



- Výpočet obsahu provedeme pomocí vzorce $P = q \cdot p_1$. Hledáme tedy vyjádření q a p_1 pomocí zadáných hodnot r a p . Pravoúhlé trojúhelníky MST_1 , MT_1R a T_1SR jsou podobné. Z toho plyne

$$\frac{p_1}{t} = \frac{t}{p} \Rightarrow p_1 = \frac{t^2}{p};$$

z Pythagorovy věty je $t^2 = p^2 - r^2$ takže máme vypočteno $p_1 = \frac{p^2 - r^2}{p}$. Z Eukleidovy věty o výšce plyne $q^2 = p_1 \cdot p_2$, z Eukleidovy věty o odvěsně je $p \cdot p_2 = r^2$, takže $p_2 = \frac{r^2}{p}$; pak tedy

$$q^2 = p_1 \cdot p_2 = \frac{p^2 - r^2}{p} \cdot \frac{r^2}{p},$$

odkud $q = \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2}$. Odsud

$$P = q \cdot p_1 = \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2} \cdot \frac{p^2 - r^2}{p} = \frac{r}{p^2} (p^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pro $r = 3$, $p = 5$ máme

$$P_0 = \frac{3}{25}(25 - 9)^{\frac{3}{2}} = \frac{3 \cdot 64}{25} = \frac{192}{25} = 7,68.$$

- b) V daném trojúhelníku MT_1T_2 leží kruhová úseč $S T_1T_2$ s obsahem Q , takže budeme vlastně hledat poměr Q/P , přičemž P už známe. Tato kruhová úseč přísluší ke středovému úhlu T_1ST_2 o velikosti $\pi - 2\alpha$. Je-li obsah kruhu roven $K = \pi r^2$, pak pro obsah W příslušné výseče platí

$$\frac{W}{K} = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi},$$

takže

$$W = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} \cdot K,$$

kde $\alpha = \arcsin \frac{r}{p}$, takže $W = r^2(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r}{p})$. Od obsahu výseče nyní odečteme obsah trojúhelníku ST_1T_2 , což je

$$U = q \cdot p_2 = \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2} \cdot \frac{r^2}{p} = \frac{r^3}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2}.$$

Hledaný obsah úseče je

$$\begin{aligned} Q = W - U &= \frac{\pi - 2 \arcsin \frac{r}{p}}{2\pi} \cdot \pi r^2 - \frac{r^3}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2} = \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \left(\pi - 2 \arcsin \frac{r}{p} - \frac{2r}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2} \right). \end{aligned}$$

V daném kruhu leží $x = 100Q/P\%$ obsahu trojúhelníku MT_1T_2 . Při daném číselném zadání je

$$Q_0 = \frac{9}{2} \cdot \left(\pi - 2 \arcsin \frac{3}{5} - \frac{6}{25} \cdot 4 \right) \doteq 4,03.$$

Tedy $x_0 = 100Q_0/P_0\% \doteq 52,4\%$.

Řešení 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: goniometrické funkce, obsahy, obsah kruhové výseče.

Zachováme předchozí označení.

- a) Hledaný obsah vypočteme dle vzorce $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, tedy $P = \frac{1}{2}t^2 \sin 2\alpha$, kde $t^2 = p^2 - r^2$ a $\sin \alpha = \frac{r}{p}$. Pomocí r a p vyjádříme $\sin 2\alpha$. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, kde $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2}$, takže

$$\sin 2\alpha = 2 \frac{r}{p} \sqrt{1 - \frac{r^2}{p^2}} = 2 \frac{r}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2}.$$

Odsud

$$P = \frac{1}{2}(p^2 - r^2) \cdot 2 \frac{r}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2} = \frac{r}{p^2} (p^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.$$

b) Obsah výseče určíme stejně jako v řešení 1 ze vztahu

$$W = \frac{\pi - 2\alpha}{2\pi} \cdot K = \frac{\pi - 2 \arcsin \frac{r}{p}}{2\pi} \cdot \pi r^2 = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r}{p} \right);$$

obsah U trojúhelníku ST_1T_2 je

$$U = r \sin \alpha \cdot r \cos \alpha = r^2 \frac{r}{p} \sqrt{1 - \frac{r^2}{p^2}} = \frac{r^3}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2}.$$

Závěr výpočtu je stejný jako v řešení 1.

$$Q = W - U, \quad x = 100Q/P \, \%.$$

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: Goniometrické funkce, trigonometrie (kosinová věta), obsahy, obsah kruhové výseče.

Zde pozměníme označení. V trojúhelníku MT_1T_2 označíme $|T_1T_2| = s$, $|MR| = v$, $|\sphericalangle T_1MT_2| = \varphi$, $|MT_1| = |MT_2| = t$. Hledaný obsah trojúhelníku MT_1T_2 je $P = \frac{1}{2}s \cdot v$.

a) Z kosinové věty plyne $s^2 = t^2 + t^2 - 2t^2 \cos \varphi = 2t^2(1 - \cos \varphi)$; přitom $t^2 = p^2 - r^2$,

$$1 - \cos \varphi = 1 - \cos 2\frac{\varphi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \frac{r^2}{p^2};$$

odsud

$$s^2 = 2(p^2 - r^2) \cdot 2 \frac{r^2}{p^2}; \quad s = \frac{2r}{p} \sqrt{p^2 - r^2}.$$

Ježto $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{t}{p}$, je

$$v = t \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{t^2}{p} = \frac{p^2 - r^2}{p}$$

a konečně

$$P = \frac{1}{2} \frac{2r}{p} \sqrt{p^2 - r^2} \cdot \frac{p^2 - r^2}{p} = \frac{r}{p^2} (p^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pokračování dle (1).

b) $W = \frac{\varphi}{2\pi} \pi r^2$; $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{p}$, takže $\varphi = 2 \arccos \frac{r}{p}$, $W = r^2 \arccos \frac{r}{p} = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r}{p} \right)$.

$$U = \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi = \frac{1}{2} r^2 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = r^2 \frac{r}{p} \sqrt{1 - \frac{r^2}{p^2}} = \frac{r^3}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2}.$$

Pak už dostáváme totéž jako v předchozích řešeních,

$$Q = W - U, \quad x = 100Q/P \, \%.$$

Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie, rovnice kružnice, tečna ke kružnici, kvadratická rovnice s parametrem, Eukleidovy věty.

Použijeme označení z 1. řešení.

- a) Bod M zvolíme v počátku souřadnicové soustavy a střed kružnice k na ose x , $S[p; 0]$. Rovnice kružnice je pak $(x - p)^2 + y^2 = r^2$. Bodem M vedeme přímku $y = ax$ a koeficient a volíme tak, aby tato přímka byla tečnou kružnice k . Hledáme tedy průsečík přímky s kružnicí

$$(x - p)^2 + a^2 x^2 = r^2 \Rightarrow (1 + a^2)x^2 - 2px + p^2 - r^2 = 0. \quad (1)$$

Vypočteme čtvrtinový diskriminant $D = p^2 - (1 + a^2)(p^2 - r^2)$ a položíme ho roven 0, neznámou je nyní a^2 .

$$-a^2(p^2 - r^2) + r^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{r^2}{p^2 - r^2}, \quad a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{r^2}{p^2 - r^2}} = \pm \frac{r}{\sqrt{p^2 - r^2}}.$$

Tečny mají rovnice $y = \pm \frac{r}{\sqrt{p^2 - r^2}}x$. Dále hledáme x -ové souřadnice dotykových bodů, tj. řešíme rovnici (1)

$$x_{1,2} = \frac{p}{1 + a^2} = \frac{p}{1 + \frac{r^2}{p^2 - r^2}} = \frac{p^2 - r^2}{p},$$

a příslušné y -ové souřadnice jsou

$$y_{1,2} = \pm \frac{r}{\sqrt{p^2 - r^2}} \frac{p^2 - r^2}{p} = \pm \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2}.$$

Platí

$$P = x_1 \cdot y_1 = \frac{p^2 - r^2}{p} \cdot \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2} = \frac{r}{p^2} (p^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}.$$

- b) Označme velikost úhlu T_1SR jako γ . Pak $W = \frac{2\gamma}{2\pi} \pi r^2 = \gamma r^2$. Platí $\operatorname{tg} \gamma = \frac{t}{r} = \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r}$, takže $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r}$ a $W = r^2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r}$. Označíme opět $q = |RT_1|$, $p_2 = |RS|$ Podle Eukleidovy věty o odvěsně je $p \cdot p_2 = r^2$, takže $p_2 = \frac{r^2}{p}$ a $q = p_2 \cdot \operatorname{tg} \gamma$;

$$U = p_2 \cdot q = \frac{r^2}{p} \cdot \frac{r^2}{p} \cdot \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r} = \frac{r^3}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2}.$$

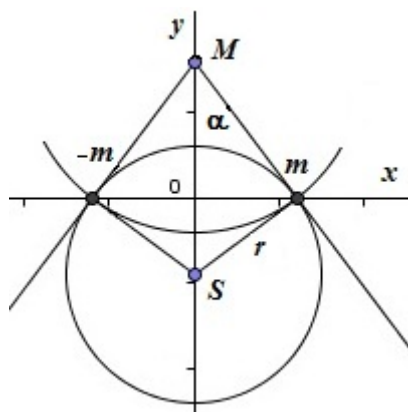
Nakonec

$$Q = W - U, \quad x = 100Q/P \%.$$

Řešení 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: goniometrické a cyklometrické funkce, rovnice přímky, rovnice kružnice, integrace užitím substituce

Objekty umístíme, jak je ukázáno na obrázku.



Označme $T_1[-m; 0]$, $T_2[m; 0]$, $O[0; 0]$, α je velikost úhlu OT_2S ; platí $|SM| = p$. Vidíme, že y -ová souřadnice bodu S je $-r \sin \alpha$, a ježto $\sin \alpha = \frac{r}{p}$, máme $S \left[0; -\frac{r^2}{p} \right]$. Dále vidíme, že

$$m = r \cos \alpha = r \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = r \sqrt{1 - \frac{r^2}{p^2}} = \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2}.$$

- a) Obsah trojúhelníku MT_1T_2 můžeme vypočítat jako dvojnásobek obsahu trojúhelníku MT_2O . Najdeme nyní rovnici přímky MT_2 . Vektor kolmý k vektoru $\mathbf{u} = T_2 - S = \left(-\frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2}, \frac{r^2}{p}\right)$ je např. $\mathbf{v} = (r; \sqrt{p^2 - r^2})$, takže směrnice k přímky MT_2 je $k = \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r}$. Rovnice přímky MT_2 , která jde daným bodem T_2 a má směrnici k je

$$y - 0 = \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r} \left(x + \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2}\right),$$

tedy

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r} x + \frac{p^2 - r^2}{p}.$$

Proto

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_{-m}^0 f(x) \, dx = 2 \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r} x^2 + \frac{p^2 - r^2}{p} x \right]_{-m}^0 = \\ &= 2 \left(-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{r} \frac{r^2}{p^2} (p^2 - r^2) + \frac{p^2 - r^2}{p} \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2} \right) = \frac{r}{p^2} (p^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

- b) Nyní budeme počítat obsah Q kruhové úseče nad osou x . Rovnice dané kružnice je $x^2 + \left(y + \frac{r^2}{p}\right)^2 = r^2$. Pro oblouk úseče v horní polorovině máme $\left(y + \frac{r^2}{p}\right)^2 = r^2 - x^2$, takže $y = -\frac{r^2}{p} + \sqrt{r^2 - x^2}$,

$$Q = \int_{-m}^m \left(-\frac{r^2}{p} + \sqrt{r^2 - x^2} \right) dx;$$

Nejprve vypočteme primitivní funkci, k tomu rozdělíme integrant na dvě části.

$$I_1 = - \int \frac{r^2}{p} dx = -\frac{r^2}{p} x;$$

$$I_2 = \int \sqrt{r^2 - x^2} dx;$$

v tomto integrálu provedeme substituci $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$. Pak

$$I_2 = r^2 \int \cos^2 t dt.$$

Ze vzorců pro goniometrické funkce plyne $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, takže po integraci je

$$I_2 = \frac{1}{2}r^2(t + \frac{1}{2} \sin 2t) = \frac{1}{2}r^2(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}),$$

kde $\sin t = \frac{x}{r}$;

$$I_2 = \frac{1}{2}r^2(\arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}).$$

Přejdeme k určitému integrálu

$$[I_1]_{-m}^m = -\frac{r^2}{p} [x]_{-m}^m = -\frac{r^2}{p} (\frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2} + \frac{r}{p} \sqrt{p^2 - r^2}) = -\frac{2r^3}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2},$$

$$\begin{aligned} [I_2]_{-m}^m &= \frac{1}{2}r^2(2 \arcsin \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{p} + 2 \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{p} \sqrt{1 - \frac{p^2 - r^2}{p^2}}) = \\ &= r^2(\arcsin \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{p} + \frac{r}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2}), \end{aligned}$$

$$Q = [I_1]_{-m}^m + [I_2]_{-m}^m = r^2(\arcsin \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{p} - \frac{r}{p^2} \sqrt{p^2 - r^2}).$$

Poznámka. Ověřte, že

$$\arcsin \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{p} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{r}{p}.$$

$$x = 100Q/P \%.$$

Metodické poznámky

Řešení úlohy patří k náročnějším a lze ji použít u vyspělejších tříd. Zadaný zvláštní případ, výpočet x , je uveden jen u 1. řešení. Je samozřejmé, že u každého řešení 2–4 je třeba si pořídit obrázek podobné jako v řešení 1.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: analytická geometrie v prostoru, vektory, přímky

Úloha

Je dán trojúhelník ABC , $A[5; -1; -2]$, $B[-3; 2; 2]$, $C[1; 2; -10]$. Vypočítejte jeho výšku na stranu a .

Pro jednoduchost budeme písmenem a označovat přímku BC , stranu a jako úsečku i délku strany a .

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: parametrické vyjádření přímky dané dvěma body, bodem vést rovnoběžku s danou přímkou, rovnice roviny kolmé k dané přímce, vzdálenost dvou bodů

Bodem A vedeme přímku $p \parallel a$, zvolíme rovinu ϱ kolmou k těmto přímkám (počátkem), zjistíme průsečíky S a T , pak $v = |ST|$.

- a) Najdeme parametrickou rovnici přímky a ; směrový vektor této přímky je $\mathbf{u} = C - B = (4; 0; -12)$, dále však pro jednoduchost použijeme $\mathbf{u} = (1; 0; -3)$. Přímka a má parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned}x &= -3 + t, \\y &= 2, \\z &= 2 - 3t,\end{aligned}\tag{1}$$

rovnoběžka $p \parallel a$, jdoucí bodem A je vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= 5 + s, \\y &= -1, \\z &= -2 - 3s.\end{aligned}$$

- b) Rovinu ϱ vedeme počátkem, takže má rovnici $1x + 0y - 3z = 0$, tedy $x - 3z = 0$.
c) Zjistíme průsečíky přímek s rovinou.

$$\begin{aligned}T: -3 + t - 3(2 - 3t) &= 0 \Rightarrow 10t - 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{9}{10} = 0,9; & T[-2,1; 2; -0,7]; \\S: 5 + s - 3(-2 - 3s) &= 0 \Rightarrow 10s + 11 = 0 \Rightarrow s = -\frac{11}{10} = -1,1; & S[3,9; -1; 1,3].\end{aligned}$$

- d)

$$v = |ST| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7.$$

Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: směrové vektory přímek v prostoru, skalární součin vektorů, řešení soustavy lineárních rovnic, vzdálenost dvou bodů

Užitím kolmosti najdeme vektor $R - A$, kde R je pata výšky na stranu a .

- a) Stejně jako v 1. řešení, bod a), najdeme parametrické vyjádření přímky a . Na této přímce leží bod R .
- b) Vektor $R - A$ výšky trojúhelníku je kolmý k vektoru $\mathbf{u}$, takže jejich skalární součin je roven 0.

$$(-3 + t - 5) \cdot 1 + (2 + 1) \cdot 0 + (2 - 3t + 2) \cdot (-3) = 0;$$

odsud vypočteme $t = 2$. Po dosazení do soustavy v a) dostaneme $R = [-1; 2; -4]$.

- c) Stejně jako v 1. řešení vypočteme $v = 7$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrové vektory přímek v prostoru, skalární součin vektorů, řešení soustavy lineárních rovnic, vzdálenost dvou bodů

Z bodu A vedeme kolmici, zatím s neurčenými souřadnicemi směrového vektoru, na přímku a ; pata kolmice je bod R , hledaná velikost výšky je $v = |AR|$.

- a) Přímka a je parametricky vyjádřena rovnicemi (1), viz 1. řešení, bod a).
- b) Směrový vektor výšky z vrcholu A je $\mathbf{v} = (p; q; r)$ a je kolmý na vektor $\mathbf{u}$; proto pro jejich skalární součin platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, tj. $1 \cdot p + 0 \cdot q - 3 \cdot r = 0$, tedy $p = 3r$; zvolme $r = 1$, pak $p = 3$, q je zatím neurčeno, ale kolmost vektorů $\mathbf{v} = (3; q; 1)$ a $\mathbf{u}$ je splněna pro libovolné q . Výška v z vrcholu A (jako přímka) je vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= 5 + 3s, \\y &= -1 + qs, \\z &= -2 + s.\end{aligned}$$

- c) Přímky a , c se protínají v bodě R , takže porovnáme odpovídající si souřadnice.

$$\begin{aligned}-3 + t &= 5 + 3s, \\2 &= -1 + qs, \\2 - 3t &= -2 + s.\end{aligned}$$

Potřebujeme zjistit hodnotu parametru t ; ze 3. rovnice je $s = 4 - 3t$, což dosadíme do 1. rovnice $-3 + t = 5 + 3 \cdot (4 - 3t) \Rightarrow -3 + t = 5 + 12 - 9t \Rightarrow t = 2$. Ze soustavy v bodě a) vypočteme souřadnice bodu R : $x = -3 + 2$, $y = 2$, $z = 2 - 6$, takže $R[-1; 2; -4]$.

- d)

$$v = |AR| = \sqrt{(-1 - 5)^2 + (2 + 1)^2 + (-4 + 2)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7.$$

Řešení 4 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: směrové vektory přímek v prostoru, rovnice roviny kolmé k dané přímce, průsečík přímky s rovinou, vzdálenost dvou bodů

Bodem A vedeme rovinu ϱ kolmou k přímce a , vyšetříme průsečík R roviny s přímkou a , hledaná výška trojúhelníku je $v = |AR|$.

- a) Směrový vektor přímky a je $\mathbf{u} = C - B = (4; 0; -12)$; použijeme vektor $\mathbf{u} = (1; 0; -3)$; přímku vyjádříme parametricky, viz (1). Směrový vektor $\mathbf{u}$ přímky p je normálovým vektorem roviny ϱ , rovnice roviny tedy je

$$1 \cdot (x - 5) + 0 \cdot (y + 1) - 3 \cdot (z + 2) = 0,$$

po úpravě $x - 3z - 11 = 0$.

- b) Do rovnice roviny ϱ dosadíme parametrické rovnice přímky p

$$(-3 + t) - 3(2 - 3t) - 11 = 0,$$

odsud $t = 2$ a po dosazení této hodnoty do parametrického vyjádření přímky a dostáváme $R = [-1; 2; -4]$.

- c) Stejně jako v 1. řešení vypočteme $v = 7$.

Řešení 5 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: směrový vektor přímky, vektorový součin a jeho geometrický význam, obsah trojúhelníku

Výšku v vypočteme tak, že obsah P trojúhelníku ABC dělíme polovinou délky odpovídající strany a . Obsah P vypočteme pomocí vektorového součinu směrových vektorů stran $b = AC$ a $c = AB$,

- a) Směrový vektor strany $b = AC$ je $\mathbf{w}_b = C - A = (-4; 3; -8)$, pro $c = AB$ je $\mathbf{w}_c = B - A = (-8; 3; 4)$.

$$\mathbf{w}_b \times \mathbf{w}_c = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 3 & -8 \\ -8 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (12 + 24)\mathbf{i} + (64 + 16)\mathbf{j} + (-12 + 24)\mathbf{k} = 36\mathbf{i} + 80\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

$$|\mathbf{w}_b \times \mathbf{w}_c| = \sqrt{1296 + 6400 + 144} = \sqrt{7840} = 28\sqrt{10},$$

$$P = 14\sqrt{10}.$$

- b) Velikost strany a je rovna $|C - B| = \sqrt{16 + 0 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

c)

$$v = 14\sqrt{10}/2\sqrt{10} = 7.$$

Řešení 6 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: parametrické rovnice přímky dané dvěma body, rovnice plochy kulové dané středem a poloměrem, vzájemné poloha přímky a plochy kulové, řešení kvadratické rovnice

Uvažujme plochu kulovou se středem A a se zatím neznámým poloměrem r , a dále přímku a . Vyšetřujeme-li společné body plochy kulové a přímky, dostaneme kvadratickou rovnici, a za podmínky, že diskriminant je roven 0, je $v = r$.

a) Rovnice kulové plochy se středem A a poloměrem r je

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = r^2.$$

b) Parametrické rovnice přímky a jsou odvozeny v bodě a) prvního řešení, viz (1).

c) Proměnné x, y, z ze soustavy v bodě b) dosadíme do rovnice plochy kulové

$$(-3 + t - 5)^2 + (2 + 1)^2 + (2 - 3t + 2)^2 - r^2 = 0$$

a upravíme na tvar

$$10t^2 - 40t + 89 - r^2 = 0.$$

Diskriminant (čtvrtinový) je $D = 400 - 890 + 10r^2 = 0 \Rightarrow 10r^2 = 490, r = 49$, takže $v = r = 7$.

Řešení 7 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: délka úsečky, kosinová věta, goniometrické funkce, trigonometrický vzorec pro obsah kruhu

Výšku v vypočteme tak, že obsah P trojúhelníku ABC dělíme polovinou délky odpovídající strany a . Obsah P vypočteme pomocí trigonometrického vzorce, přičemž nejprve zjistíme velikost úhlu α při vrcholu A .

a) Vypočteme

$$a = |BC| = \sqrt{16 + 0 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10},$$

$$b = |AC| = \sqrt{16 + 9 + 64} = \sqrt{89},$$

$$c = |AB| = \sqrt{64 + 9 + 16} = \sqrt{89},$$

b) Podle kosinové věty je $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, tj. $160 = 89 + 89 - 2 \cdot 89 \cos \alpha$, odkud $178 \cos \alpha = 18 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{9}{89}$, α je ostrý úhel.

c) Ve vzorci pro obsah je třeba znát hodnotu $\sin \alpha$; tu zjistíme pomocí kosinu takto

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{89^2 - 9^2}{89^2}} = \sqrt{\frac{7840}{89^2}} = \sqrt{\frac{164910}{89^2}} = \frac{28}{89}\sqrt{10}.$$

d)

$$P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{89}\sqrt{89} \cdot \frac{28}{89}\sqrt{10} = 14\sqrt{10},$$

$$v = 14\sqrt{10}/2\sqrt{10} = 7.$$

Metodické poznámky

Tento způsob řešení je náročnější numericky. Pokud si řešitel připraví plán řešení, jak je v úvodu uveden, a při vlastním řešení by zjistil, jako v tomto případě, že délky b, c stran jsou si rovny, $b = c$, pak jde o rovnoramenný trojúhelník a řešitel může svůj plán změnit, protože v tomto případě je patou výšky z vrcholu A (bod R) střed úsečky (strany) BC , takže výpočet lze dokončit v jednom řádku.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: odchylka dvou přímek, kolmost dvou přímek (v rovině i v prostoru)

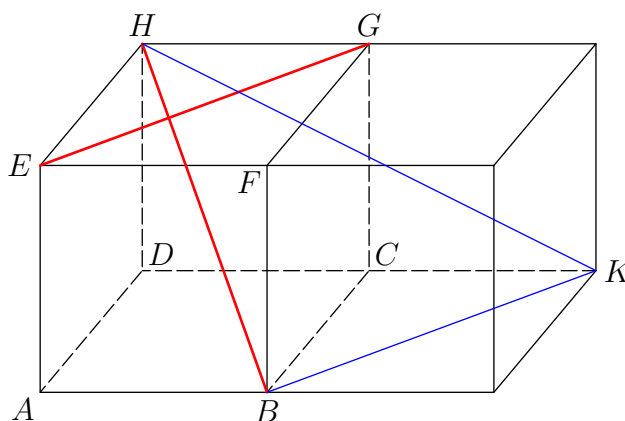
Úloha

Je dána krychle $ABCDEFGH$, délka její hrany je a . Určete odchylku přímek EG a BH .

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, kosinová věta

Odchylku dvou mimoběžných přímek EG a BH zjistíme jako odchylku dvou různoběžných přímek BH a BK . Přímka BK je rovnoběžná s přímkou EG (obr. 1).



Obr. 1

Pro výpočet hledané odchylky zjistíme velikost vnitřního úhlu β při vrcholu B v trojúhelníku HBK .

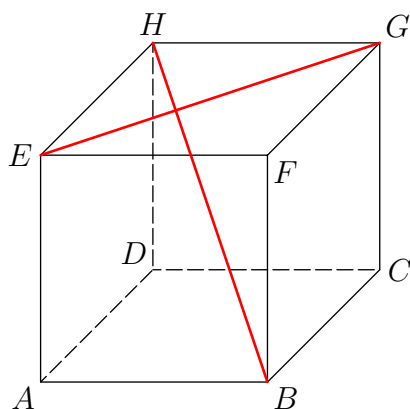
Platí $|BK| = a\sqrt{2}$ (úhlopříčka ve čtverci se stranou a), $|BH| = a\sqrt{3}$ (tělesová úhlopříčka krychle s délkou hrany a), $|KH| = a\sqrt{5}$ (z pravoúhlého trojúhelníku DKH

$$|KH| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$

V trojúhelníku HBK známe velikosti všech stran. To znamená, že velikost úhlu β můžeme vypočítat pomocí kosinové věty.

Je ovšem zřejmé, že pro délky stran trojúhelníku HBK platí Pythagorova věta. Trojúhelník HBK je pravoúhlý s přeponou HK .

Závěr. Odchylka mimoběžných přímek EG a BH je tedy 90° (jsou kolmé).



Obr. 2

Řešení 2 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: definice kolmosti přímky a roviny, kritérium kolmosti přímky a roviny

Na obr. 2 jsou na krychli $ABCDEFGH$ vyznačeny mimoběžky EG a BH .

Přímka BF je kolmá k rovině EFG . Přímka BF je tedy kolmá ke všem přímkám roviny EFG , tzn. i k přímce EG .

Přímka EG je kolmá k různoběžným přímkám BF a HF (úsečky EG a HF jsou kolmé úhlopříčky ve čtverci $EFGH$). To znamená, že přímka EG je kolmá k rovině BFH .

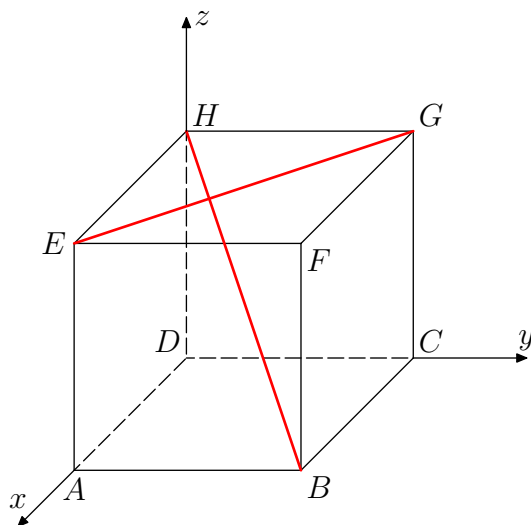
Přímka EG je tedy kolmá ke všem přímkám roviny BFH , tedy i k přímce BH .

Opět docházíme k závěru, že přímky EG a BH jsou na sebe kolmé.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: analytická geometrie v prostoru – metrické úlohy

Krychli $ABCDEFGH$ umístíme do pravoúhlé soustavy souřadnic (obr. 3). Předpokládáme, že délka hrany krychle $a = 1$. Potom pro souřadnice bodů B , H , E , G platí: $B[1; 1; 0]$, $H[0; 0; 1]$, $E[1; 0; 1]$, $G[0; 1; 1]$.



Obr. 3

Vypočítáme směrové vektory přímk EG a BH .

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= G - E = (-1; 1; 0), \\ \mathbf{v} &= B - H = (1; 1; -1).\end{aligned}$$

Vypočítáme odchylku β přímk EG a BH .

$$\cos \beta = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 0.$$

Opět docházíme k závěru, že hledaný úhel β má velikost 90° .

Řešení 4 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta

Hledanou odchylku přímk EG a BH můžeme sestojit konstrukčně. Při konstrukčním řešení sestojíme trojúhelník HBK (obr. 1).

Strana BK je úhlopříčka ve čtverci o straně délky a . Strana HK je úhlopříčka v obdélníku se stranami a , $2a$. Strana BH je přepona v pravoúhlém trojúhelníku BDH s odvěsnami a , $a\sqrt{2}$.

Určili jsme graficky délky všech stran trojúhelníku HBK . Pokud tento trojúhelník sestojíme, opět zjistíme, že úhel při vrcholu B má velikost 90° .

Metodické poznámky

Úloha z učiva střední školy umožňuje žákům ukázat čtyři odlišné přístupy při hledání odchylky dvou přímk. Úlohu lze zadat ve třídě pro samostatnou práci žáků (žáci budou schopni přijít na řešení 1, 3, 4) a následně diskutovat výhody a nevýhody zvoleného řešení. Na základě zkušeností autora lze očekávat, že největší problémy budou mít žáci s řešením 2.

Zdroj:

Kočandrle, M., Boček, L.: *Matematika pro gymnázia (analytická geometrie)*, Prometheus, 1995.

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Geometrie

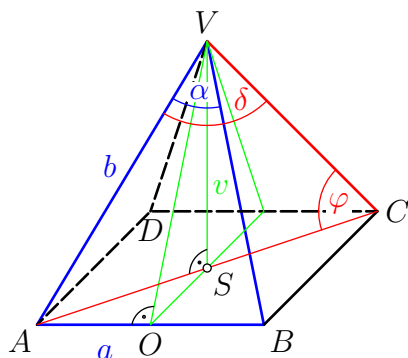
Klíčové pojmy: geometrie v prostoru, trigonometrie

Úloha

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Označme odchylku vedlejších bočních hran $\alpha = |\sphericalangle AVB|$, odchylku protějších bočních hran $\delta = |\sphericalangle AVC|$, odchylku boční hrany od roviny podstavy $\varphi = |\sphericalangle ACV|$, délku hran dolní podstavy $a = |AB|$, délku bočních hran $b = |AV|$, tělesovou výšku $v = |VS|$, kde S je střed podstavy.

Vyberte z proměnných a, b, v, δ, φ vztahujících se k zadání nejvýše dvě a jejich pomocí vyjádřete $\cos \alpha$.

Komentář. Ke všem následujícím řešením se vztahuje tento obrázek.



V těchto řešeních ukážeme, že $\cos \alpha$ lze užitím jedné proměnné vyjádřit pomocí δ (řešení 6, 7) a φ (řešení 8). Pomocí dvou proměnných $\cos \alpha$ vyjádříme užitím a a b (řešení 1, 2), a a v (řešení 3, 4) a b a v (řešení 5).

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: jehlan, kosinová věta

V rovnoramenném trojúhelníku ABV se stranami $a = |AB|$, $b = |AV| = |BV|$ platí kosinová věta

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos \alpha, \quad \text{odkud} \quad \cos \alpha = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}.$$

Závěr. Pomocí a, b lze vyjádřit $\cos \alpha = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: jehlan, osový řez, Pythagorova věta, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, úpravy výrazů

Z pravoúhlého trojúhelníku AOV (O je střed hrany AB) lze vyjádřit

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b}$$

a dosazením do známého vzorce

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

tak získat

$$\cos \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2a^2}{4b^2} = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}.$$

Závěr. Pomocí a, b lze vyjádřit $\cos \alpha = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: jehlan, Pythagorova věta

Z pravoúhlého trojúhelníku ASV lze pomocí Pythagorovy věty vyjádřit druhou mocninu délky boční hrany $b^2 = v^2 + \frac{1}{2}a^2$, kde $\frac{1}{2}a^2$ je druhá mocnina poloviny délky úhlopříčky podstavy $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$. Ze vztahu odvozeného v prvním řešení pak platí

$$\cos \alpha = \frac{2(v^2 + \frac{1}{2}a^2) - a^2}{2b^2} = \frac{2v^2}{2v^2 + a^2}.$$

Závěr. Pomocí a, v lze vyjádřit $\cos \alpha = \frac{2v^2}{2v^2 + a^2}$.

Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: jehlan, Pythagorova věta, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, úpravy výrazů

Z pravoúhlého trojúhelníku OSV (O je střed hrany AB) lze vyjádřit délku stěnové výšky $h = |OV|$ pomocí Pythagorovy věty

$$h^2 = v^2 + \frac{a^2}{4},$$

z pravoúhlého trojúhelníku AOV platí

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2h}$$

a ze známého vzorce

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \text{vyjádříme} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Po dosazení z výše odvozených vztahů platí

$$\cos \alpha = \frac{1 - \left(\frac{a}{2h}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2} = \frac{4h^2 - a^2}{4h^2 + a^2} = \frac{2v^2}{2v^2 + a^2}.$$

Závěr. Pomocí a, v lze vyjádřit $\cos \alpha = \frac{2v^2}{2v^2 + a^2}$.

Řešení 5 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Pythagorova věta, kosinová věta, úpravy výrazů

Lze užít předcházejících řešení a do výsledku (z řešení 1)

$$\cos \alpha = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}$$

dosadit (z Řešení 3)

$$a^2 = 2b^2 - 2v^2,$$

odkud

$$\cos \alpha = \frac{v^2}{b^2}.$$

Závěr. Pomocí b, v lze vyjádřit $\cos \alpha = \frac{v^2}{b^2}$.¹⁾

Řešení 6 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: jehlan, odchylka přímk, kosinová věta

V rovnoramenném trojúhelníku ACV , jehož základnou je úhlopříčka podstavy o délce $a\sqrt{2}$ a ramena jsou boční hrany jehlanu o délce b , platí kosinová věta

$$2a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \delta.$$

Z trojúhelníku ABV lze též vyjádřit užitím kosinové věty

$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \alpha.$$

Platí tedy

$$2b^2 - 2b^2 \cos \alpha = b^2 - b^2 \cos \delta \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{1 + \cos \delta}{2}.$$

Závěr. Pomocí odchylky hran $\delta = |\sphericalangle AVC|$ lze vyjádřit $\cos \alpha = \frac{1 + \cos \delta}{2}$.

Řešení 7 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: jehlan, odchylka přímk, kosinová věta, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, úpravy výrazů

V pravoúhlém trojúhelníku ASV platí $\cos \frac{\delta}{2} = \frac{v}{b}$. Užitím výše uvedeného řešení 5 vyjádříme

$$\cos \alpha = \left(\frac{v}{b}\right)^2 = \left(\cos \frac{\delta}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{1 + \cos \delta}{2}.$$

¹⁾ Při samostatném způsobu Řešení 5 nezávislém na předcházejících je třeba nejprve vyjádřit $\cos \alpha = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}$, např. pomocí kosinové věty, a $\frac{1}{2}a^2 = b^2 - v^2$ z trojúhelníka ASV pomocí Pythagorovy věty.

Závěr. Pomocí odchylky hran $\delta = |\sphericalangle AVC|$ lze vyjádřit $\cos \alpha = \frac{1 + \cos \delta}{2}$.¹⁾

Řešení 8 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: odchylka přímek, kosinová věta, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, úpravy výrazů

V pravoúhlém trojúhelníku ASV platí $\sin \varphi = \frac{v}{b}$ a tedy $(\sin \varphi)^2 = \left(\frac{v}{b}\right)^2$, což se dle výše uvedeného řešení 5 rovná $\cos \alpha$.

Závěr. Pomocí odchylky φ boční hrany od roviny podstavy $\cos \alpha = (\sin \varphi)^2$.

Metodické poznámky

Úloha může být zadána jako samostatná či skupinová práce, popř. formou soutěže. („Kdo najde více způsobů řešení.“) Možno též rozdělit na jednotlivé příklady s pevným zadáním. („Vyjádřete $\cos \alpha$ pomocí odchylky boční hrany od roviny podstavy ...“) Úloha procvičuje základní učivo z RVP. Její obtížnost je zejména v obecném zadání. Pro nejslabší studenty je možno zadat nejprve úlohu s konkrétními údaji („Pomocí funkce kosinus vypočítejte odchylku hran AV a BV v pravidelném čtyřbokém jehlanu s délkou hrany $a = |AB| = 5$ a hrany $b = |AV| = 10$.“) Přesto, že lze každý způsob řešení použít samostatně, je možno též jednotlivá řešení propojit a nechat gradovat. V případě, že při řešení použijeme již získané poznatky, obtížnost se zřejmě značně sníží oproti tomu, bude-li řešení použito samostatně.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz

¹⁾ Při samostatném způsobu řešení 6, 7, 8 nezávislém na předcházejících je třeba nejprve odvodit $\cos \alpha = \frac{v^2}{b^2}$ užitím kosinové věty.

Různé metody řešení

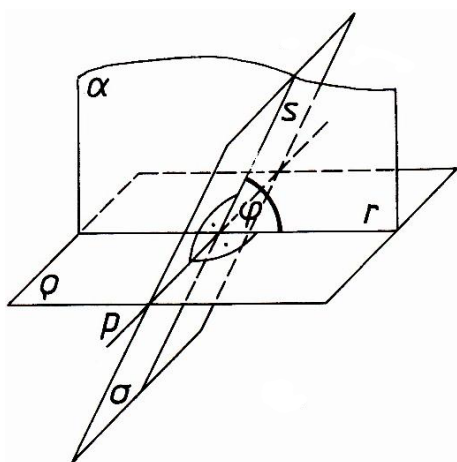
Tematický okruh RVP G: Geometrie

Klíčové pojmy: geometrie v prostoru – metrické vlastnosti

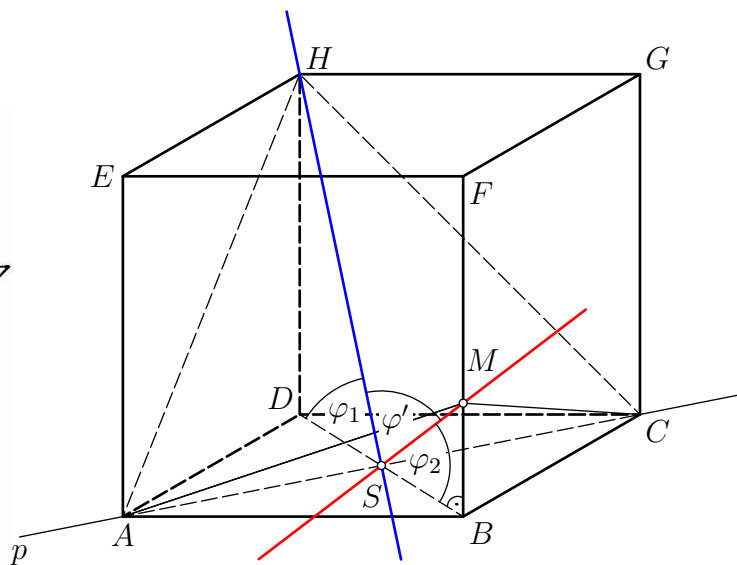
Úloha

Je dána krychle $ABCDEFGH$, bod M je bodem hrany BF tak, že $|BM| : |MF| = 1 : 2$. Určete odchylku rovin ACH a ACM .

Rozbor úlohy. Odchylku φ rovin ρ a σ převedeme na odchylku přímk r , s , v nichž obě roviny protíná rovina α kolmá k jejich průsečnici p (obr. 1). V daném případě (obr. 2) je průsečnicí rovin ACH a ACM přímka AC , rovina kolmá k oběma rovinám je rovina BDF , průsečnicí rovin BDF a ACH je přímka SH (bod S je průsečík přímk AC a BD , tj. střed stěny $ABCD$ krychle), průsečnicí rovin BDF a ACM je přímka SM . Je tedy úkolem určit odchylku přímk SH a SM .



Obr. 1



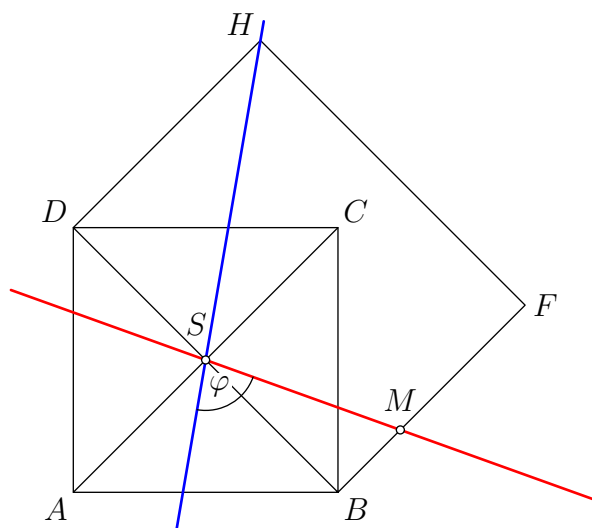
Obr. 2

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: odchylka přímk, základní konstrukční dovednosti

Pro konstrukci řešení použijeme $a = 6$ cm.

1. Sestrojíme čtverec $ABCD$ o délce strany 6 cm, úhlopříčky AC a BD a jejich průsečík S .
2. „Sklopíme“ obdélník $DBFH$ a na úsečce BF určíme bod M , $|BM| : |MF| = 1 : 2$.
3. Odchylka přímk SH a SM je hledaná odchylka $\varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$.



Obr. 3

Řešení 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: odchylka přímk, kosinová věta, úpravy výrazů s odmocninami

Jedná se o početní řešení s využitím kosinové věty. V trojúhelníku HSM je podle kosinové věty

$$|HM|^2 = |SH|^2 + |SM|^2 - 2 \cdot |SH| \cdot |SM| \cdot \cos \varphi',$$

odkud

$$\cos \varphi' = \frac{|SH|^2 + |SM|^2 - |HM|^2}{2 \cdot |SH| \cdot |SM|}. \quad (1)$$

Délky úseček SH , SM a HM určíme po řadě z pravoúhlých trojúhelníků SDH , SBM a HFM využitím Pythagorovy věty

$$|SH| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$|SM| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{11a^2}{18}} = a\sqrt{\frac{11}{18}},$$

$$|HM| = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{22a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{22}}{3}.$$

Po dosazení do (1) a úpravách je

$$\cos \varphi' = \frac{\frac{3a^2}{2} + \frac{11a^2}{18} - \frac{22a^2}{9}}{2 \cdot \sqrt{\frac{3a^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{11a^2}{18}}} = -\frac{\sqrt{33}}{33}.$$

Odtud $\varphi' \doteq 100^\circ$ a tedy $\varphi \doteq 80^\circ$.

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: odchylka přímk, goniometrické funkce ostrého úhlu

Jedná se o početní řešení s využitím goniometrických funkcí ostrého úhlu.

Z pravoúhlého trojúhelníku SDH je

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{|HD|}{|SD|} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \quad \text{tj.} \quad \varphi_1 \doteq 55^\circ.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku SBM je

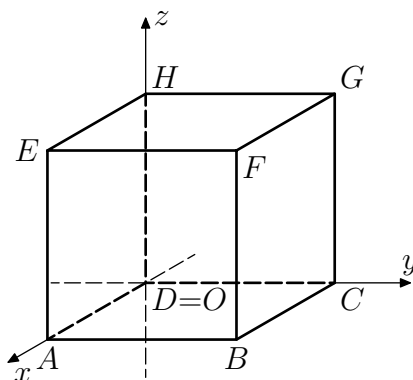
$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{|MB|}{|SB|} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \text{tj.} \quad \varphi_2 \doteq 25^\circ.$$

Pro φ' platí $\varphi' = 180^\circ - (\varphi_1 + \varphi_2)$, a protože $\varphi = 180^\circ - \varphi'$, je $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \doteq 80^\circ$ (plyne rovněž ze shodnosti vrcholových úhlů).

Řešení 4 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: soustava souřadnic v prostoru, vektorový počet - souřadnice vektoru, úhel vektorů, obecná rovnice roviny

Využijeme poznatků z analytické geometrie. Zvolíme vhodně soustavu souřadnic $O = D$, $x \leftrightarrow DA$, $y \leftrightarrow DC$, $z \leftrightarrow DH$ (obr. 3).



Obr. 4

Délku a hrany krychle můžeme volit libovolně, např. $a = 1$, neboť všechny krychle jsou navzájem podobné a podobnost „zachovává“ úhly.

Souřadnice bodů určujících dané roviny pak budou $A[1; 0; 0]$, $C[0; 1; 0]$, $H[0; 0; 1]$, $M[1; 1; \frac{1}{3}]$. Potřebné vektory jsou

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1; 1; 0), \quad \overrightarrow{AH} = H - A = (-1; 0; 1), \quad \overrightarrow{AM} = M - A = (0; 1; \tfrac{1}{3}).$$

Normálový vektor roviny ACH je $\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AH} = (1; 1; 1)$. Normálový vektor roviny ACM je $\mathbf{n}_2 = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AM} = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -1)$.

Odchylku rovin určíme pomocí úhlu vektorů

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{|\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{11}{9}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{33}}{3}} = \frac{\sqrt{33}}{3} \Rightarrow \varphi \doteq 80^\circ.$$

Metodické poznámky

Při klasickém řešení převedeme odchylku rovin na odchylku přímek, využitím soustavy souřadnic počítáme pomocí úhlu normálových vektorů daných rovin. Analytickou metodu můžeme zařadit pouze do matematického semináře, neboť analytická geometrie prostoru není obsahem základního učiva.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Eva Pomykalová; eva.pomykalova@email.cz