

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Typ úloh: Různé metody řešení



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	5
Metodický list 3	7
Metodický list 4	9
Metodický list 5	11
Metodický list 6	13
Metodický list 7	15
Metodický list 8	17
Metodický list 9	19

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: přirozené číslo, kritéria dělitelnosti

Úloha

Najděte všechna přirozená čísla tvaru $\overline{ab0ab}$, kde a, b jsou číslice, $a \neq 0$, která jsou dělitelná jedenácti.

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: dělení čísel

Uvažovaná čísla jsou tato

$$10010, 11011, 12012, \dots, 99099.$$

Celkem jich je $9 \cdot 10 = 90$. Není to velké množství, proto je možné všechna tato čísla vydělit číslem 11.

Závěr. Všechna čísla tvaru $\overline{ab0ab}$, kde a, b jsou číslice, $a \neq 0$, jsou dělitelná číslem 11.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: zápis čísel v desítkové soustavě, rozklad přirozených čísel na součin prvočísel

Číslo $\overline{ab0ab}$, kde a, b jsou číslice, $a \neq 0$, můžeme přepsat do tvaru

$$\overline{ab0ab} = 10000a + 1000b + 10a + b = (10a + b) \cdot 1001 = (10a + b) \cdot 91 \cdot 11.$$

Odsud je vidět, že každé uvažované číslo $\overline{ab0ab}$ je dělitelné číslem 11.

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rozklad přirozených čísel na součin prvočísel, kritérium dělitelnosti jedenácti

Využijeme kritérium dělitelnosti přirozených čísel jedenácti. Za tím účelem upravíme čísla $\overline{ab0ab}$ tak, aby se dalo avizované kritérium aplikovat, tedy

$$b - a + 0 - b + a = 0.$$

Jelikož je číslo 0 dělitelné číslem 11, jsou jedenácti dělitelná všechna čísla $\overline{ab0ab}$.

Metodické poznámky

Úloha je jednoduchá, dají se na její řešení použít jen mechanická pravidla. Na některých školách se kritérium dělitelnosti neprobírá, proto je tento způsob řešení zařazen až na konec. Třetí způsob řešení může sloužit k rozšíření souboru kritérií dělitelnosti přirozených čísel.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice a nerovnice, soustavy lineárních rovnic, cyklické soustavy

Úloha

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 9, \\2x + 3y + z &= 12, \\3x + y + 2z &= 15.\end{aligned}$$

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: dosazovací metoda, řešení lineárních rovnic

Vyjádříme-li z první rovnice $x = 9 - 2y - 3z$, dostaneme po dosazení do zbývajících rovnic po úpravě

$$\begin{aligned}-y - 5z &= -6, \\-5y - 7z &= -12.\end{aligned}$$

Dosadíme-li pak $y = 6 - 5z$ do poslední rovnice, získáme řešením lineární rovnice $z = 1$. Snadno pak dopočteme

$$\begin{aligned}y &= 6 - 5 \cdot 1 = 1, \\x &= 9 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 4.\end{aligned}$$

Soustava rovnic má pak řešení $x = 4, y = 1, z = 1$.

Závěr. Soustava má řešení $K = \{(4; 1; 1)\}$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení soustav lineárních rovnic, důsledkové úpravy

Sečteme-li všechny tři rovnice dané soustavy, dostáváme po snadné úpravě

$$x + y + z = 6.$$

Odečteme-li dvojnásobek této rovnice od všech tří rovnic původní soustavy, dostaneme soustavu novou, a to

$$\begin{aligned}-x + z &= -3, \\y - z &= 0, \\x - y &= 3.\end{aligned}$$

Snadno tedy vidíme, že $y = z$ a $x = z + 3$. Dosazením do libovolné z rovnic původní soustavy dostáváme

$$x = 4, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

Protože se jednalo o důsledkovou úpravu, je zapotřebí se o správnosti řešení přesvědčit pomocí zkoušky.

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice s parametrem, aditivní metoda řešení

Chceme-li při řešení uplatnit i sčítací metodu, můžeme na první dvě rovnice nahlížet jako na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých s jedním reálným parametrem z , tj.

$$x + 2y = 9 - 3z,$$

$$2x + 3y = 12 - z.$$

Pomocí aditivní metody můžeme vypočítat obě neznámé,

$$2x + 4y = 18 - 6z$$

$$\underline{-2x - 3y = -12 + z}$$

$$y = 6 - 5z,$$

$$-3x - 6y = -27 + 9z$$

$$\underline{4x + 6y = 24 - 2z}$$

$$x = -3 + 7z.$$

Dosazením do třetí rovnice dostaneme

$$3(-3 + 7z) + (6 - 5z) + 2z = 15,$$

odkud již snadno získáme $z = 1$, a tedy také $x = 4$, $y = 1$.

Metodické poznámky

Soustavy tří rovnic o třech neznámých patří ke standardnímu učivu. S uvedenými postupy se studenti mají možnost seznámit už na ZŠ, resp. v prvním ročníku studia na SŠ. Mezi další, často používané metody na SŠ patří dále řešení soustav pomocí matic, příp. pomocí diskriminantů.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: lineární rovnice s absolutní hodnotou

Úloha

Řešte rovnici $|3x + 1| = 5$ v oboru reálných čísel.

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: řešení lineární rovnice s absolutní hodnotou

Nejprve určíme nulový bod dvojčlenu $3x + 1$, tj. $-\frac{1}{3}$. Tímto bodem rozdělíme množinu reálných čísel na dva intervaly, tj. $I_1 = (-\infty; -\frac{1}{3})$, $I_2 = (-\frac{1}{3}; +\infty)$. V každém z intervalů I_1 , I_2 vyjádříme absolutní hodnotu dvojčlenu $3x + 1$, přehledně uvedeme v tabulce.

	$I_1 = (-\infty; -\frac{1}{3})$	$I_2 = (-\frac{1}{3}; \infty)$
$ 3x + 1 $	$-3x - 1$	$3x + 1$

Rovnici

$$|3x + 1| = 5 \quad (1)$$

vyřešíme samostatně v každém z intervalů I_1 , I_2 :

1. Pro $x \in I_1$ platí

$$-3x - 1 = 5,$$

odtud $x_1 = -2$. Zřejmě $x_1 \in I_1$, tedy tento prvek je jediným řešením rovnice (1) na intervalu I_1 .

2. Pro $x \in I_2$ platí

$$3x + 1 = 5,$$

odtud $x_2 = \frac{4}{3}$. Zřejmě $x_2 \in I_2$, proto x_2 je jediným řešením rovnice (1) na intervalu I_2 .

Množinu K všech řešení rovnice (1) získáme jako sjednocení množin všech jejích řešení na intervalech I_1 , I_2 , tj.

$$K = \{-2\} \cup \left\{\frac{4}{3}\right\} = \left\{-2, \frac{4}{3}\right\}.$$

Závěr. Množina řešení rovnice $|3x + 1| = 5$ je $K = \{-2, \frac{4}{3}\}$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: geometrický význam absolutní hodnoty, řešení lineárních rovnic s absolutní hodnotou

Vycházejme z geometrického významu absolutní hodnoty, tj. absolutní hodnota rozdílu libovolných prvků a, b z množiny reálných čísel je rovna vzdálenosti obrazů čísel a, b na číselné ose.

Nejprve upravme rovnici

$$|3x + 1| = 5 \quad (2)$$

do tvaru $|x - c| = r$, kde $c \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$. Po vytknutí a provedení ekvivalentních úprav dostaneme

$$\left| x - \left(-\frac{1}{3} \right) \right| = \frac{5}{3}. \quad (3)$$

Prvek x je řešením rovnice (3) právě tehdy, když jeho vzdálenost od obrazu čísla $-\frac{1}{3}$ na číselné ose je rovna $\frac{5}{3}$. Taková čísla x existují právě dvě, tj. $x_1 = \frac{4}{3}$ a $x_2 = -2$. Prvky x_1 , x_2 jsou zřejmě řešením jak rovnice (3) tak rovnice (2), protože od rovnice (2) jsme dospěli k rovnici (3) pomocí ekvivalentních úprav.

Závěr. Množina řešení rovnice $|3x + 1| = 5$ je $K = \{-2, \frac{4}{3}\}$.

Řešení 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratické rovnice

Řešme rovnici

$$|3x + 1| = 5 \quad (4)$$

umocněním na druhou, tato úprava rovnice (4) je zřejmě ekvivalentní, jelikož levá i pravá strana rovnice (4) je vždy nezáporná pro libovolný prvek $x \in \mathbb{R}$. Po umocnění a provedení ekvivalentních úprav dostaneme

$$9x^2 + 6x - 24 = 0. \quad (5)$$

Řešením kvadratické rovnice (5) jsou $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{4}{3}$. x_1 , x_2 jsou zřejmě řešením jak rovnice (5) tak rovnice (4), protože od rovnice (4) jsme dospěli k rovnici (5) pomocí ekvivalentních úprav.

Závěr. Množina řešení rovnice $|3x + 1| = 5$ je $K = \{-2, \frac{4}{3}\}$.

Metodické poznámky

Druhý a třetí způsob řešení umožňuje demonstrovat další přístupy k řešení lineárních rovnic s absolutní hodnotou. Úlohu je možné zadat jak pro samostatnou práci tak skupinovou práci s tím, že žáci mohou hledat více způsobů řešení a následně diskutovat výhody jednotlivých řešení.

Zdroj:

Charvát, J., Zhouf, J., Boček, L. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus).

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Úloha

V množině reálných čísel řešte nerovnici $|2x - 3| \geq |2 - 3x|$.

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: lineární funkce s absolutní hodnotou

Upravíme nerovnici na tvar $|2x - 3| - |2 - 3x| \geq 0$. Levou stranou je lineární funkce s absolutní hodnotou

$$l(x) = |2x - 3| - |2 - 3x|,$$

která, protože je spojitá, může změnit znaménko jen při průchodu nulovým bodem. Řešíme tedy rovnici $l(x) = 0$.

Lze postupovat bez rozboru a výsledek ověřit zkouškou: Buď mají vnitřky absolutních hodnot stejná znaménka, pak

$$(2x - 3) - (2 - 3x) = 0$$

a $x_1 = 1$, anebo mají vnitřky absolutních hodnot opačná znaménka, pak

$$(2x - 3) + (2 - 3x) = 0$$

a $x_2 = -1$. Obě hodnoty rovnici vyhovují.

Řešením nerovnice může být interval $(-\infty; -1)$ nebo $\langle -1; 1 \rangle$ nebo $\langle 1; \infty \rangle$.

Dosazením některého libovolně zvoleného bodu z každého intervalu do $l(x)$ zjistíme, že $l(x) \geq 0$ pro $x \in \langle -1; 1 \rangle$. Např. $l(-10) = |-23| - |-28| = -5$, $l(0) = |-3| - |2| = 1$, $l(2) = |1| - |-4| = -3$.

Závěr. Řešením nerovnice je každé reálné číslo $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

Metodické poznámky

O spojitosti není potřeba hovořit, stačí geometrická představa o grafu funkce, jímž je nepřerušovaná (lomená) čára.

Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: definice absolutní hodnoty

Pomocí nulových bodů výrazů v absolutní hodnotě určíme intervaly, na nichž je možné absolutní hodnoty odstranit.

Na levé straně $2x - 3 = 0$ pro $x_1 = \frac{3}{2}$, na pravé straně $2 - 3x = 0$ pro $x_2 = \frac{2}{3}$.

Dana nerovnice s absolutní hodnotou se tak rozpadne na tři nerovnice bez absolutní hodnoty pro tři intervaly: $(-\infty; \frac{2}{3})$, $\langle \frac{2}{3}; \frac{3}{2} \rangle$ a $\langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$.

- Pro $x \in (-\infty; \frac{2}{3})$ je $2x - 3 \leq 0$ a $2 - 3x \geq 0$. Nerovnice má tedy tvar

$$-2x + 3 \geq 2 - 3x.$$

Vyjde $x \geq -1$, ale protože tato nerovnice platí pro $x \in (-\infty; \frac{2}{3})$, musí $x \in \langle -1; \frac{2}{3} \rangle$

- Pro $x \in \langle \frac{2}{3}; \frac{3}{2} \rangle$ je $2x - 3 \leq 0$ a $2 - 3x \leq 0$. Nerovnice má tedy tvar

$$-2x + 3 \geq -2 + 3x.$$

Vyjde $x \leq 1$, ale protože tato nerovnice platí pro $x \in \langle \frac{2}{3}; \frac{3}{2} \rangle$, musí $x \in \langle \frac{2}{3}; 1 \rangle$

- Pro $x \in \langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$ je $2x - 3 \geq 0$ a $2 - 3x \leq 0$. Nerovnice má tedy tvar

$$2x - 3 \geq -2 + 3x.$$

Vyjde $x \leq -1$, ale protože tato nerovnice platí pro $x \in \langle \frac{3}{2}; \infty \rangle$, nemá řešení.

Závěr. Řešením nerovnice je každé reálné číslo $x \in \langle -1; \frac{2}{3} \rangle \cup \langle \frac{2}{3}; 1 \rangle = \langle -1; 1 \rangle$.

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztah absolutní hodnoty a odmocniny

Víme, že $|a| = \sqrt{a^2}$ pro všechna reálná a . Proto lze nerovnici přepsat na tvar

$$\sqrt{(2x - 3)^2} \geq \sqrt{(2 - 3x)^2}.$$

Protože pro naši nerovnici platí $l(x) \geq p(x) \geq 0$, je umocnění ekvivalentní úpravou a netřeba zkoušky. Takže

$$\begin{aligned} (2x - 3)^2 &\geq (2 - 3x)^2 \\ 4x^2 - 12x + 9 &\geq 4 - 12x + 9x^2 \\ 1 &\geq x^2 \end{aligned}$$

Tedy $|x| \leq 1$.

Závěr. Řešením nerovnice je každé reálné číslo $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice a nerovnice, kvadratické rovnice s parametrem, Viètovy vztahy

Úloha

Je dána kvadratická rovnice

$$3x^2 - 7x + 2 = 0.$$

Určete reálné koeficienty p, q tak, aby rovnice

$$y^2 + py + q = 0$$

měla kořeny, které jsou o 5 menší, než kořeny rovnice v proměnné x .

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratických rovnic, Viètovy vztahy

Vypočteme-li diskriminant $D = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$ první kvadratické rovnice, dostaneme kořeny

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Kvadratická rovnice v proměnné y má proto kořeny

$$y_1 = 2 - 5 = -3, \quad y_2 = \frac{1}{3} - 5 = -\frac{14}{3}.$$

Príslušná kvadratická rovnice má tedy tvar

$$(y - (-3))(y - (-\frac{14}{3})) = 0,$$

tj.

$$(y + 3)(y + \frac{14}{3}) = 0,$$

Roznásobením výrazů dostaneme

$$y^2 + \frac{23}{3}y + 14 = 0.$$

Závěr. Hledané koeficienty jsou tedy $p = \frac{23}{3}$, $q = 14$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratických rovnic, Viètovy vztahy

Z Viètových vztahů pro první rovnici dostáváme

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} = \frac{2}{3}, \\ x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Z Viètových vztahů pro druhou rovnici dostáváme

$$\begin{aligned}y_1 \cdot y_2 &= q, \\ y_1 + y_2 &= -p.\end{aligned}$$

Dosazením $y_1 = x_1 - 5$ a $y_2 = x_2 - 5$ do druhého Viètova vztahu získáme

$$x_1 - 5 + x_2 - 5 = -p,$$

tj.

$$p = 10 - x_1 - x_2 = 10 - \frac{7}{3} = \frac{23}{3}.$$

Dosazením $y_1 = x_1 - 5$ a $y_2 = x_2 - 5$ do prvního Viètova vztahu získáme

$$(x_1 - 5)(x_2 - 5) = q,$$

tj.

$$q = x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25 = \frac{2}{3} - 5 \cdot \frac{7}{3} + 25 = 14.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratických rovnic, Viètovy vztahy

Má-li mít rovnice v proměnné y kořeny o 5 menší než rovnice v proměnné x , stačí provést lineární transformaci

$$y = x - 5$$

a rovnice pak bude mít tvar

$$3 \cdot (y + 5)^2 - 7 \cdot (y + 5) + 2 = 0,$$

tj.

$$3y^2 + 23y + 42 = 0.$$

Vydělíme-li získanou rovnici číslem 3, dostáváme normovaný tvar

$$y^2 + \frac{23}{3}y + 14 = 0,$$

ze kterého snadno vyčteme příslušné hodnoty parametrů.

Metodické poznámky

Vztahy mezi kořeny a koeficienty patří k základním poznatkům, se kterými se studenti při studiu na SŠ setkávají. Zatímco s prvními dvěma postupy se studenti seznámí už v prvním ročníku studia, pojem lineární transformace se zmiňuje až v kapitole o funkcích (mnohdy až ve druhém ročníku).

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: operace s komplexními čísly, komplexně sdružené číslo, komplexní číslo v goniometrickém a exponenciálním tvaru

Úloha

Zjednodušte výraz

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}.$$

Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: dělení komplexních čísel pomocí rozšíření zlomku, sčítání a násobení komplexních čísel

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} &= \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} + \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \\ &= \frac{1+2i+i^2}{2} + \frac{1-2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} - \frac{2i}{2} = 0.\end{aligned}$$

Závěr. Daný výraz je roven 0.

Metodické poznámky

V RVP G je uvedeno, že učivo z matematiky je možné rozšířit o operace s komplexními čísly v případě potřeby odborných předmětů, což také školy často činí. Řešení úlohy je standardním řešením pomocí rozšíření zlomku.

Řešení 2 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: dělení komplexních čísel pomocí vzorce

Dělení komplexních čísel je možné obecně zapsat vzorcem $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2}$, kde $\bar{w}$ je komplexně sdružené číslo k číslu w a $|w|$ je velikost komplexního čísla. Úlohu vyřešíme užitím výše uvedeného vzorce

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} &= (1+i) \cdot \frac{1+i}{1^2+1^2} + (1-i) \cdot \frac{1-i}{1^2+1^2} = \\ &= \frac{(1+i)^2 + (1-i)^2}{2} = \frac{(2i) + (-2i)}{2} = 0.\end{aligned}$$

Metodické poznámky

Řešení úlohy poskytuje možnost vyřešit úlohu mechanickým způsobem, který je vhodný pro studenty s malou schopností vidět v matematice.

Řešení 3 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: sčítání zlomků, násobení komplexních čísel a komplexně sdružených čísel

Ve jmenovatelích obou sčítaných zlomků jsou navzájem komplexně sdružená čísla. Tyto zlomky je možné nejdříve sečíst. Ve vzniklém jmenovateli obdržíme reálné číslo

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)(1+i) + (1-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2+1-2i+i^2}{2} = 0.$$

Metodické poznámky

Toto řešení úlohy umožňuje obejít trik rozšíření zlomku k vydělení dvou komplexních čísel a využívá pouze sčítání zlomků a vzorců pro násobení dvojčlenů.

Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: komplexní číslo v exponenciálním a goniometrickém tvaru, práce s mocninami.

Komplexní číslo $a + bi$ zapíšeme v exponenciální tvaru jako $e^{\alpha+i\beta}$ a s ním komplexně sdružené číslo $a - bi$ má tvar $e^{\alpha-i\beta}$. Toho využijeme v našem příkladu. Číslo $1+i$ zapíšeme ve tvaru $e^{\alpha+i\beta}$, proto pak $1-i = e^{\alpha-i\beta}$. Číslo α není potřeba v tomto příkladě blíže specifikovat.

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{e^{\alpha+i\beta}}{e^{\alpha-i\beta}} + \frac{e^{\alpha-i\beta}}{e^{\alpha+i\beta}} = e^{2\beta i} + e^{-2\beta i}.$$

Poslední rovnost dostaneme úpravou mocnin se stejným základem v každém zlomku. Zbývá ještě použít vztahu mezi exponenciálním tvarem a goniometrickým tvarem komplexního čísla. Tedy

$$e^{2\beta i} + e^{-2\beta i} = \cos 2\beta + i \sin 2\beta + \cos(-2\beta) + i \sin(-2\beta) = 2 \cos 2\beta.$$

Zbývá připomenout, že β je kladný úhel, který svírá reálná osa se spojnicí počátku a daného komplexního čísla. V našem případě $\beta = 45^\circ$. Proto $2 \cos 2\beta = 2 \cos 90^\circ = 0$.

Metodické poznámky

Toto řešení využívá nejhlubších poznatků o komplexních číslech, umožňuje jejich procvičení. Dále ukazuje provázanost s dalšími poznatky matematiky a toto učivo vhodně doplňuje technické předměty a je také vhodnou přípravou ke studiu na VŠ. Umožňuje zaměstnat lepší studenty hledáním nějakého obecného vzorce pro výpočet obdobných příkladů. V RVP G toto učivo nenajdeme, ale je vhodným rozšířením učiva pro studenty se zájmem pokračovat na VŠ technického směru.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: řešení kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel ($\mathbb{C}$), soustava nelineárních rovnic, Moivreova věta

Úloha

Určete všechna řešení rovnice $x^4 + 1 = 0$ v oboru $\mathbb{C}$.

Řešení 1 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: řešení rovnice pomocí substituce, řešení kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel, řešení soustav nelineárních rovnic

Zavedeme substituci $y = x^2$, čímž rovnice přejde do tvaru $y^2 + 1 = 0$. Kořeny této rovnice jsou komplexní čísla $\pm i$. Nyní musíme určit řešení rovnic $x^2 = i$ a $x^2 = -i$. Zapišeme postup pro řešení první z nich a řešení druhé z nich se najde analogicky. Řešení budeme hledat ve tvaru $x = a + ib$. Dostaneme tak rovnici $(a + ib)^2 = i$. Umocněním a porovnáním koeficientů v dané rovnici obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= 0, \\ 2ab &= 1.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic jsou komplexní čísla $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Zbylá řešení dostaneme stejným způsobem z rovnice $x^2 = -i$. Jsou to čísla $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Závěr. Všechna řešení této rovnice jsou komplexní čísla $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Metodické poznámky

Toto řešení kombinuje užití substituce, které studenti znají z řešení jiných rovnic a užití výpočtu kořenů pomocí soustavy rovnic, která vznikne porovnáním reálné a imaginární části dvou komplexních čísel. Poslední uvedená myšlenka je pro studenty těž uchopitelná. Je však dobrou přípravou pro jiné části matematiky. Toto jsou důvody, proč je řešení zahrnuto do vyšší úrovně.

Řešení 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: rozklad mnohočlenu na součin, řešení kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel

Mnohočlen $x^4 + 1$ lze rozložit na kvadratické trojčleny a poté najít kořeny těchto trojčlenů dle klasického vzorce.

$$x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Tedy

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2},$$
$$x_{3,4} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$$

Metodické poznámky

Řešení pomocí tohoto rozkladu na součin kvadratických trojčlenů není standardním řešením takovéto úlohy. Je to spíše řešení trikové. Umožňuje však tento příklad vyřešit bez Moivreovy věty a rozklad je hezkým příkladem umění vidět v matematice. Pokud je studentům trik dopředu prozrazen, není další dořešení již náročné.

Řešení 3 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: goniometrický tvar komplexních čísel, Moivreova věta

V posledním uvedeném řešení této úlohy je klasické řešení pomocí Moivreovy věty. Hledáme komplexní řešení rovnice $z^4 = -1$ v goniometrickém tvaru $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Tedy

$$z^4 = |z|^4(\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha) = 1 \cdot (\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)).$$

Je zřejmé, že $|z| = 1$ a $\alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k = 0, 1, 2, 3$.

Závěr. Opět tak obdržíme čtyři kořeny této rovnice, a to $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Metodické poznámky

Moivreova věta je krásným vyvrcholením učiva o komplexních čísel, která je již mimo rozsah RVP G. Poskytuje studentům vyřešit úlohu téměř mechanicky. Proto je úroveň tohoto řešení označena 1–2. Také je velmi vhodným doplněním učiva o řešení algebraických rovnic i rozkladech mnohočlenu na součin.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: reálné číslo, rovnost, nerovnost

Úloha

Pro kladná reálná čísla a, b platí $a + b = 1$. Jakou největší možnou hodnotu může mít součin ab ?

Řešení 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: úprava algebraických výrazů, základní nerovnosti

Zřejmě platí $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$. Po dosazení $a + b = 1$ dostáváme

$$1 = (a - b)^2 + 4ab.$$

Vzhledem k tomu, že $(a - b)^2 \geq 0$, tak odtud již přímo plyne $4ab \leq 1$, tj. $ab \leq \frac{1}{4}$.
V případě, že $a = b$, platí $ab = \frac{1}{4}$.

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG nerovnost)

Využijeme nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem nezáporných reálných čísel a, b .

Pro libovolná dvě nezáporná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Po dosazení $a + b = 1$ dostáváme

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2},$$

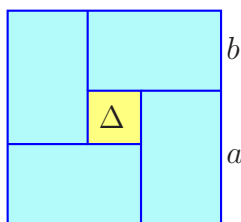
odkud plyne

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad ab \leq \frac{1}{4}.$$

Řešení 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: obsah pravoúhelníku

Úlohu můžeme pojmout také z pohledu geometrie. Uvažujme čtverec o straně délky $a + b$ s vyznačením úseku a, b tak, jak je uvedeno na obr. 1.



Obr. 1

Z obrázku je patrné, že

$$(a + b)^2 = 4ab + \Delta,$$

kde Δ je obsah vnitřního pravoúhelníku. Po dosazení $a + b = 1$ odtud již snadno plyne

$$1 = 4ab + \Delta,$$

$$ab \leq \frac{1}{4}.$$

Řešení 4 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: úprava kvadratického trojčlenu (metoda doplnění na „čtverec“)

Vyjádříme přímo součin ab . Z podmínky $a + b = 1$, tj. $b = 1 - a$ plyne

$$ab = a(1 - a) = a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Řešení 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: základy diferenciálního počtu, průběh funkce

Úlohu lze také řešit také s využitím diferenciálního počtu. Označíme-li $a = x$, pak $b = 1 - x$, $ab = x(1 - x)$. Dostáváme tak funkci $f: y = x - x^2$. Nyní určíme její lokální extrém(y). Pro 1. derivaci platí

$$y' = 1 - 2x.$$

Z rovnice $y' = 0$ plyne $x = \frac{1}{2}$. Tento bod je bodem podezřelým z existence lokálního extrému. Snadno určíme (např. užitím 2. derivace), že v tomto bode nabývá funkce f svého maxima $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, nutně tedy platí $ab \leq \frac{1}{4}$.

Metodické poznámky

Úloha je ukázkou toho, jak lze řešit daný problém s využitím odlišných způsobů řešení. V našem případě jsme použili při řešení úlohy vlastností kvadratické funkce, AG nerovnost, obsah rovinného útvaru a derivace funkce. Ukazujeme tak, jak jednotlivé oblasti matematiky spolu souvisí a přispíváme tak ke komplexnějšímu pohledu na matematiku. Úlohu lze zadat ve třídě jako samostatnou práci žáků a v závěrečné diskusi doplnit řešení, která žáci neodhalili.

Zdroj: archiv autora, autor

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: RNDr. Dag Hrubý; hruby@gymjev.cz

Různé metody řešení

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: goniometrické rovnice

Úloha

Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$\sin x^4 + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$$

Řešení 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: goniometrické rovnice, substituce, kvadratická rovnice

Ze zadání je zřejmé, že $\cos x \neq 0$, tedy lze využít úpravu

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= \left(\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + 1 \right) \cdot \cos^4 x = (\operatorname{tg}^4 x + 1) \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \right)^2 = \\ &= (\operatorname{tg}^4 x + 1) \cdot \left(\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} \right)^2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^4 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}.\end{aligned}$$

Daná rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^4 x}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} = \frac{5}{8}.$$

Po vynásobení obou stran rovnice výrazem $8(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2$ získáváme rovnici

$$8 + 8 \operatorname{tg}^4 x = 5 + 10 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg}^4 x,$$

kterou upravíme na

$$3 \operatorname{tg}^4 x - 10 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0.$$

Užijeme substituci $y = \operatorname{tg}^2 x$ a řešíme kvadratickou rovnici

$$3y^2 - 10y + 3 = 0, \quad \text{odkud} \quad y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{1}{3} \right\}.$$

S ohledem na použitou substituci platí buď $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$, nebo $\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, a tedy

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Vzhledem k tomu, že $-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}$, lze výše uvedená řešení zapsat pouze dvěma způsoby s primitivní periodou $\frac{\pi}{2}$.

Závěr. Řešením jsou všechna reálná čísla ve tvaru

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Řešení 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi goniometrickými funkcemi, řešení goniometrických rovnic

Levou stranu rovnice upravíme

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2},$$

přitom jsme užili vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Řešíme rovnici

$$1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{5}{8},$$

po úpravě dostáváme

$$4\sin^2 2x = 3,$$

odkud

$$\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Závěr. Řešením jsou všechna reálná čísla ve tvaru

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi goniometrickými funkcemi, řešení goniometrických rovnic

Pokračujeme-li v naznačené úpravě levé strany rovnice z předcházejícího řešení, dostaneme postupně užitím vzorce $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}.$$

Poté řešíme rovnici

$$\frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4} = \frac{5}{8}, \quad \text{tedy} \quad \cos 4x = -\frac{1}{2},$$

odkud

$$\left(4x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \quad \vee \quad \left(4x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right),$$

tedy

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{nebo} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Závěr. Řešením jsou všechna reálná čísla ve tvaru

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Řešení 4 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi goniometrickými funkcemi, řešení goniometrických rovnic

Další způsob řešení je založen na jiné úpravě levé strany užitím vzorce $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, tedy

$$\sin x^4 + \cos^4 x = (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x + 2\cos^4 x.$$

Poté řešíme rovnici

$$1 - 2\cos^2 x + 2\cos^4 x = \frac{5}{8},$$

kterou upravíme na tvar

$$16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3 = 0.$$

Odtud

$$\cos^2 x = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{32} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}, \quad \text{tedy} \quad \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos x = \pm \frac{1}{2},$$

tedy

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{nebo} \quad x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Závěr. Řešením jsou všechna reálná čísla ve tvaru

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Řešení 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vztahy mezi goniometrickými funkcemi, řešení goniometrických rovnic

Levou stranu rovnice opět upravíme jinak

$$\sin x^4 + \cos^4 x = \frac{1 - \left((\sin x + \cos x)^4 - 1 \right)^2 + 2(\sin x + \cos x)^2}{2},$$

odkud s použitím substituce $y = (\sin x + \cos x)^2$ dostaneme zadanou rovnici ve tvaru

$$\frac{1 - y^2 + 2y}{2} = \frac{5}{8}.$$

Upravíme a vyřešíme kvadratickou rovnici $4y^2 - 8y + 1 = 0$. Získáme

$$y = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a dříve než se vrátíme k substituci, upravíme

$$1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \pm 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2.$$

Poté řešíme rovnice

$$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = (\sin x + \cos x)^2 \Rightarrow \left| \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |\sin x + \cos x|.$$

Pokud nahradíme $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ a $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, pak

$$\left(\sin x - \sin \frac{\pi}{6} = \pm \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \right) \quad \text{nebo} \quad \left(\sin x + \sin \frac{\pi}{6} = \pm \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \right).$$

Postupně vyřešíme všechny 4 rovnice:

- a) $\sin x + \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} - \cos x,$
- b) $\sin x + \sin \frac{\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} - \cos x,$
- c) $\sin x - \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} - \cos x,$
- d) $\sin x - \sin \frac{\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} - \cos x$

Přitom využijeme vzorce

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right), \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right), \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right), \\ \cos \alpha - \cos \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned}$$

a) Užitím výše uvedených vzorců upravíme rovnici na tvar

$$2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = -2 \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2} \right),$$

tedy

$$\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \left[\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \right) - \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right] = 0,$$

odkud

$$\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = 0, \tag{1}$$

nebo

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0. \quad (2)$$

Z rovnice (1) dostáváme $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} = k\pi$, tedy $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Z rovnice (2) dostáváme $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 1$, odkud $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, celkem tedy

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Podobně vyřešíme zbylé tři rovnice

b)

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) &= -2 \cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \left[\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \right] &= 0, \\ \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0 \quad \text{nebo} \quad \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,$$

z druhé rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) &= -1, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} &= -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) &= -2 \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right), \\ \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \left[\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \right] &= 0, \\ \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0 \quad \text{nebo} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) &= 1, \end{aligned}$$

z čehož plyne

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

d)

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) &= -2 \cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right), \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \left[\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) \right] &= 0, \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = 0 \quad \text{nebo} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) &= -1, \end{aligned}$$

z čehož plyne

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Všechna řešení lze vyjádřit jako dvě řešení s primitivní periodou $\frac{\pi}{2}$.

Závěr. Řešením jsou všechna reálná čísla ve tvaru

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

Řešení 6 (úroveň 3*** – není v RVP)

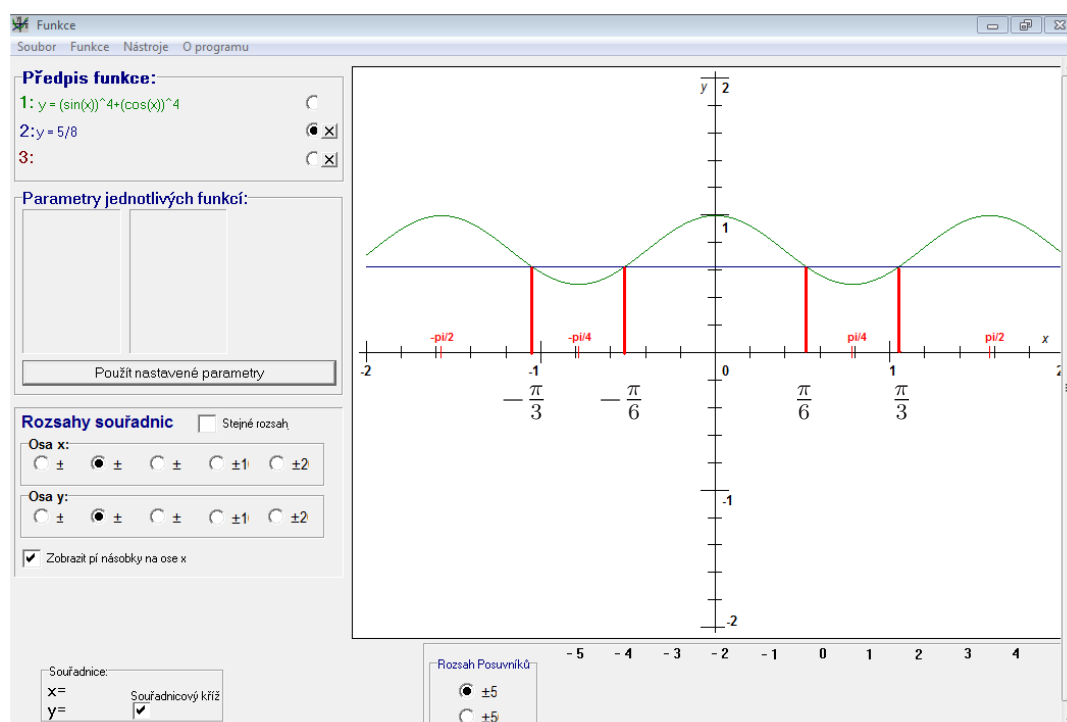
Předpokládané znalosti: průběh funkce, vztahy mezi goniometrickými funkcemi, grafické řešení goniometrických rovnic

Další možnost řešení – graficky – graf jako průběh funkce nebo z upraveného vztahu

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}$$

nebo z grafu na kalkulačce či počítači¹⁾. Tak dostaneme

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \right\}.$$



Závěr. Řešením jsou všechna reálná čísla ve tvaru

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

¹⁾ <http://funkce.argh.cz/>, http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/daniel_mica/index.html

Metodické poznámky

Různé způsoby řešení využívají především úprav výrazů obsahujících goniometrické funkce. Možno zadat jako soutěž – kdo najde nejvíce způsobů řešení (popř. úprav levé strany rovnice) Řešení 6 je uvedeno jen okrajově, průběh funkce není v RVP, avšak graf získaný např. na kalkulačce může vhodně ilustrovat získané řešení.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: Mgr. Ivana Ondráčková; ondrackova@gjkt.cz