

METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematický okruh: Číslo a proměnná

Typ úloh: Gradované úlohy



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Metodický list 1	3
Metodický list 2	6
Metodický list 3	8
Metodický list 4	11
Metodický list 5	14
Metodický list 6	17
Metodický list 7	19
Metodický list 8	25
Metodický list 9	29
Metodický list 10	32
Metodický list 11	36
Metodický list 12	42
Metodický list 13	44
Metodický list 14	47
Metodický list 15	50
Metodický list 16	53
Metodický list 17	56
Metodický list 18	58
Metodický list 19	61
Metodický list 20	64
Metodický list 21	66
Metodický list 22	69
Metodický list 23	72
Metodický list 24	75
Metodický list 25	77
Metodický list 26	80

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: průměrná rychlost

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: vytýkání, krácení, sloučení

Zjednodušte výraz

$$\frac{ab + ac - bc - c^2}{a - c} - \frac{ab + bd + ac + cd}{a + d},$$

kde $c \neq a \neq -d$.

Řešení

Nechť $c \neq a \neq -d$. Potom po vhodném vytnutí v čitatelích obou zlomků daného výrazu dostaneme nejprve

$$\frac{ab + ac - bc - c^2}{a - c} - \frac{ab + bd + ac + cd}{a + d} = \frac{a(b + c) - c(b + c)}{a - c} - \frac{b(a + d) + c(a + d)}{a + d}.$$

Uděláme-li v novém výrazu podobnou úpravu, máme

$$\frac{a(b + c) - c(b + c)}{a - c} - \frac{b(a + d) + c(a + d)}{a + d} = \frac{(b + c)(a - c)}{a - c} - \frac{(a + d)(b + c)}{a + d}.$$

Po zkrácení a sloučení je

$$\frac{(b + c)(a - c)}{a - c} - \frac{(a + d)(b + c)}{a + d} = b + c - (b + c) = 0.$$

Závěr.

$$\frac{ab + ac - bc - c^2}{a - c} - \frac{ab + bd + ac + cd}{a + d} = 0.$$

Metodické poznámky

Je třeba se orientovat, při vytýkání, v poměrně nepřehledném výrazu. Po druhé je situace složitější v tom, že se vytýká dvojčlen.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: sloučení, vytýkání, krácení

Zjednodušte výraz

$$\left(\frac{a^3 - ab^2 + b^3}{(a - b)^3} - \frac{b}{a - b} \right) \cdot \left(\frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2 - ab + b^2} - \frac{b}{a} \right), \quad \text{kde } 0 \neq a \neq b.$$

Řešení

Pro $0 \neq a \neq b$ nejprve sloučíme zlomky v hranatých závorkách a pak pokračujeme pomocí známých vzorců pro druhou a třetí mocninu dvojčlenu $a-b$ a dalších jednoduchých úprav

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^3 - ab^2 + b^3}{(a-b)^3} - \frac{b}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2 - ab + b^2} - \frac{b}{a} \right) = \\ &= \frac{a^3 - ab^2 + b^3 - b(a-b)^2}{(a-b)^3} \cdot \frac{a(a^2 - 2ab + 2b^2) - b(a^2 - ab + b^2)}{a(a^2 - ab + b^2)} = \\ &= \frac{a^3 - ab^2 + b^3 - b(a^2 - 2ab + b^2)}{(a-b)^3} \cdot \frac{a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - a^2b + ab^2 - b^3}{a(a^2 - ab + b^2)} = \\ &= \frac{a^3 - ab^2 + b^3 - a^2b + 2ab^2 - b^3}{(a-b)^3} \cdot \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a(a^2 - ab + b^2)} = \\ &= \frac{a^3 - a^2b + ab^2}{(a-b)^3} \cdot \frac{(a-b)^3}{a^3 - a^2b + ab^2} = 1. \end{aligned}$$

Závěr.

$$\left(\frac{a^3 - ab^2 + b^3}{(a-b)^3} - \frac{b}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{a^2 - 2ab + 2b^2}{a^2 - ab + b^2} - \frac{b}{a} \right) = 1.$$

Metodické poznámky

Jde o sloučení poměrně nepřehledných zlomků pomocí stanovení společného jmenovatele. Zadání je zvoleno tak, že se po úpravách oba zlomky navzájem zkrátí.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: sloučení, vytýkání, složené zlomky

Zjednodušte

$$\left[\left(1 + \frac{1 + \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}{1 - \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}} + \frac{a^2 - x^2}{a - x} \right] \cdot \frac{a}{1 + a + x}$$

pro všechny přípustné hodnoty všech reálných čísel x, a .

Řešení

Pro všechny přípustné hodnoty všech reálných čísel x, a platí: Nejprve zjednodušíme zlomky, zejména složené a pak provedeme naznačené početní výkony

$$\left[\left(1 + \frac{1 + \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}{1 - \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}} + \frac{a^2 - x^2}{a - x} \right] \cdot \frac{a}{1 + a + x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(1 + \frac{\frac{a^2 + x^2 + a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}{\frac{a^2 + x^2 - a^2 + x^2}{a^2 + x^2}} \right) \cdot \frac{1}{\frac{x^2 + a^2}{x^2}} + \frac{(a+x)(a-x)}{a-x} \right] \cdot \frac{a}{1+a+x} = \\
&= \left[\left(1 + \frac{2a^2}{2x^2} \right) \cdot \frac{x^2}{x^2 + a^2} + a + x \right] \cdot \frac{a}{1+a+x} = \\
&= \left(\frac{x^2 + a^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + a^2} + a + x \right) \cdot \frac{a}{1+a+x} = (1+a+x) \cdot \frac{a}{1+a+x} = a.
\end{aligned}$$

Závěr.

$$\left[\left(1 + \frac{1 + \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}{1 - \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2}{x^2}} + \frac{a^2 - x^2}{a - x} \right] \cdot \frac{a}{1+a+x} = a.$$

Metodické poznámky

Procvičí se zjednodušování poměrně nepřehledných složených zlomků, dále pak slučování zlomků a vytýkání. Procvičí se přehledný zápis složených zlomků.

Zdroj:

Maška, O. *Matematika v úlohách. Algebra a geometrie*. Nakladatelství Barvič a Novotný, Brno, 1947.

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: kvadratická rovnice, substituce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kvadratická rovnice, použití substituce při řešení rovnic

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{x+2}{x} + \frac{18x}{x+2} = 11$$

a stanovte podmínky řešitelnosti.

Řešení

Daná rovnice má řešení pro $x \neq 0$, $x \neq -2$. Pro zjednodušení řešení zavedeme substituci $t = \frac{x+2}{x}$. Získáme rovnici $t + \frac{18}{t} = 11$, po vynásobení t dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 - 11t + 18 = 0$. Vypočítáme její kořeny $t_1 = 9$ a $t_2 = 2$.

Nyní se vrátíme k substituci, vyřešíme dvě lineární rovnice

- a) $\frac{x+2}{x} = 9$, první řešení je $x_1 = \frac{1}{4}$,
- b) $\frac{x+2}{x} = 2$, druhé řešení je $x_2 = 2$

Závěr. Řešením rovnice je $x_1 = \frac{1}{4}$ a $x_2 = 2$.

Metodické poznámky

Je vhodné nejdříve nechat žáky spočítat tento příklad bez užití substituce a poté se substitucí, aby si uvědomili výhody substituce.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, použití substituce při řešení rovnic

V oboru reálných čísel řešte rovnici $144^x - 2 \cdot 12^x - 120 = 0$.

Řešení

Rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru $(12^x)^2 - 2 \cdot 12^x - 120 = 0$, využitím substituce $t = 12^x$ získáme kvadratickou rovnici $t^2 - 2t - 120 = 0$. Její kořeny jsou $t_1 = 12$, $t_2 = -10$. Další krok spočívá k návratu k substituci a řešíme dvě exponenciální rovnice

- a) $12^x = 12$, řešením je $x = 1$,
- b) $12^x = -10$, tato rovnice nemá řešení.

Řešení

Daná rovnice má v oboru reálných čísel jedno řešení $x = 1$.

Metodické poznámky

Substituce umožňuje převedení exponenciální rovnice na rovnici kvadratickou a výrazně zjednodušuje řešení.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení exponenciálních, logaritmických rovnic a nerovnic s parametrem a absolutní hodnotou

V oboru reálných čísel řešte rovnici a proveďte diskusi vzhledem k reálnému parametru a

$$144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0.$$

Řešení

Zavedeme substituci $y = 12^{|x|}$, neboli $|x| = \log_{12} y$. Protože $|x| \geq 0$, plyne odtud $y \geq 1$. Potom máme

$$y^2 - 2y + a = 0.$$

Řešíme kvadratickou rovnici s parametrem a , její diskriminant je $D = 4(1 - a)$. Diskutujeme následující případy:

- a) $a = 1$, potom $D = 0$ a rovnice má jeden kořen $y = 1$. Dopočteme $|x| = \log_{12} 1 = 0$, tedy $x = 0$.
- b) $D > 0$, odtud $a < 1$. Rovnice má dva kořeny $y = 1 \pm \sqrt{1 - a}$, z nichž nutnou podmínku $y > 1$ splňuje pouze kořen $y = 1 + \sqrt{1 - a}$. Odtud po odstranění absolutní hodnoty $x = \pm \log_{12} (1 + \sqrt{1 - a})$.

Závěr. V případě:

- a) $a = 1$ má daná rovnice jedno reálné řešení $x = 0$,
- b) $a < 1$ má daná rovnice dvě reálná řešení $x = \pm \log_{12} (1 + \sqrt{1 - a})$,
- c) $a > 1$ daná rovnice nemá žádné řešení.

Metodické poznámky

Úloha se na první pohled jeví náročná, ale pro její řešení se používají pouze základní operace, které jsou v RVPK. Propojuje znalosti řešení exponenciálních, logaritmických rovnic a nerovnic, absolutní hodnoty a parametru. Doporučuji využít tuto úlohu při systematizaci a při opakování. Úloha se dá zjednodušit například tak, že vynecháme absolutní hodnotu v exponentu.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: kvadratické rovnice, komplexní čísla

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice, algebraický tvar komplexního čísla

V oboru komplexních čísel řešte rovnici $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Řešení

Stejně jako při řešení kvadratické rovnice v oboru reálných čísel nejdříve vypočítáme diskriminant $D = b^2 - 4ac$. V zadané rovnici je $a = 1, b = 2, c = 5$, tedy $D = -16$. Diskriminant je záporný, daná rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení. V oboru komplexních čísel ale řešení existuje. Diskriminant můžeme zapsat jako $D = -16 = 16i^2$, řešení kvadratické rovnice jsou pak komplexní čísla $x_1 = \frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}, x_2 = \frac{-b-i\sqrt{|D|}}{2a}$. Dosazením dostáváme $x_1 = \frac{-2+4i}{2} = -1 + 2i, x_2 = \frac{-2-4i}{2} = -1 - 2i$.

Metodické poznámky

Komplexní čísla nejsou zařazeny v RVP, na gymnáziích se ale s nimi žáci seznamují v rámci volitelného semináře z matematiky. Zadaná kvadratická rovnice s reálnými koeficienty nemá řešení v oboru reálných čísel, protože její diskriminant je záporný, v oboru komplexních čísel jsou jejími kořeny čísla komplexně sdružená.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice, algebraický tvar komplexního čísla

V oboru komplexních čísel řešte rovnici $ix^2 + 2x - 5i = 0$.

Řešení

Stejně jako v předchozí úloze nejdříve vypočítáme diskriminant $D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4i \cdot (-5i) = -16$. Řešením jsou pak komplexní čísla

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{-2 + 4i}{2i} = \frac{-1 + 2i}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = 2 + i,$$
$$x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{-2 - 4i}{2i} = \frac{-1 - 2i}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = -2 + i.$$

Metodické poznámky

Zadaná kvadratická rovnice sice obsahuje komplexní koeficienty, ale k jejímu řešení stačí znát algebraický tvar komplexního čísla a početní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru. V porovnání s úlohou 1, kde byla zadaná kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, v úloze 2 kořeny rovnice nejsou čísla komplexně sdružená.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice, algebraický tvar komplexního čísla

V oboru komplexních čísel řešte rovnici $x^2 + 3x + 10i = 0$.

Řešení (algebraické řešení)

Nejdříve vypočítáme diskriminant $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10i = 9 - 40i$. Řešením kvadratické rovnice jsou komplexní čísla ve tvaru $x_{1,2} = \frac{-b + (\sqrt{D})_C}{2a}$, kde $(\sqrt{D})_C$ je dvojnásobná komplexní odmocnina komplexního čísla D . Tyto dvě hodnoty komplexní odmocniny určíme algebraicky.

Označíme $\sqrt{9 - 40i} = u + vi$, kde u, v jsou reálná čísla. Umocněním dostaneme $9 - 40i = u^2 + 2uvi - v^2$. Porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 9 &= u^2 - v^2, \\ -40 &= 2uv. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme $u = \frac{-20}{v}$ a dosadíme do první rovnice dostaneme

$$9 = \left(\frac{-20}{v}\right)^2 - v^2, \quad \text{tedy} \quad 9 = \frac{400}{v^2} - v^2.$$

Postupnými úpravami dostaneme $v^4 + 9v^2 - 400 = 0$. Zavedením substituce $v^2 = t$ dostaneme kvadratickou rovnici $t^2 + 9t - 400 = 0$, jejími kořeny jsou čísla $t_1 = -25$, $t_2 = 16$. Kořen $t_1 = -25$ nevyhovuje (druhá mocnina reálného čísla v nemůže být číslo záporné), vyhovuje pouze kořen $t_2 = 16$, tedy $v^2 = 16$, tzn. $v_1 = 4$, $v_2 = -4$. Odtud $u_1 = -5$, $u_2 = 5$. Pro $(\sqrt{D})_C$ dostáváme dvě hodnoty, a to $5 - 4i$ a $-5 + 4i$.

Řešením dané kvadratické rovnice jsou tedy komplexní čísla

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3 + 5 - 4i}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i, \\ x_2 &= \frac{-3 - 5 + 4i}{2} = \frac{-8 + 4i}{2} = -4 + 2i \end{aligned}$$

Řešení (goniometrické řešení)

Stejně jako v prvním řešení nejdříve vypočítáme diskriminant $D = b^2 - 4ac = 9 - 40i$. Řešením kvadratické rovnice jsou komplexní čísla ve tvaru $x_{1,2} = \frac{-b + (\sqrt{D})_C}{2a}$, kde $(\sqrt{D})_C$

je dvojnásobná komplexní odmocnina komplexního čísla D . Tyto dvě hodnoty komplexní odmocniny určíme goniometricky, kořeny kvadratické rovnice pak budou komplexní čísla ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{2a}.$$

Diskriminant D zapíšeme v goniometrickém tvaru

$$\begin{aligned} 9 - 40i &= |D| (\cos \alpha + i \sin \alpha), \\ |D| &= \sqrt{9^2 + 40^2} = \sqrt{1681} = 41, \\ \cos \alpha &= \frac{9}{41}, \sin \alpha = \frac{-40}{41}. \end{aligned}$$

Protože $\cos \alpha > 0$ a $\sin \alpha < 0$, tedy $\alpha \in (\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$ a $\frac{\alpha}{2} \in (\frac{3}{4}\pi; \pi)$. Proto $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ a $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$. Ze vztahů

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \text{a} \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

vypočítáme $\cos \frac{\alpha}{2}$ a $\sin \frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned} \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \frac{9}{41}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{41}}, & \cos \frac{\alpha}{2} &= \frac{-5}{\sqrt{41}}, \\ \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 - \frac{9}{41}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{41}}, & \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{4}{\sqrt{41}}. \end{aligned}$$

Řešením dané kvadratické rovnice jsou komplexní čísla

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-3 + \sqrt{41} \left(\frac{-5}{\sqrt{41}} + i \frac{4}{\sqrt{41}} \right)}{2} = \frac{-3 + (-5 + 4i)}{2} = -4 + 2i, \\ x_2 &= \frac{-3 - \sqrt{41} \left(\frac{-5}{\sqrt{41}} + i \frac{4}{\sqrt{41}} \right)}{2} = \frac{-3 - (-5 + 4i)}{2} = 1 - 2i. \end{aligned}$$

Metodické poznámky

Úloha patří k náročnějším, můžeme ji využít ve volitelném semináři z matematiky. V prvním způsobu řešení určujeme komplexní odmocninu komplexního čísla algebraicky, ve druhém goniometricky. S žáky můžeme na závěr porovnat oba způsoby řešení.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Macháčková; machacikova@gymz1.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice kvadratická, rovnice normovaná

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice a rovnice s neznámou ve jmenovateli

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\frac{1}{4x-4} - \frac{x-1}{2x+2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Řešení

Pro všechna reálná čísla $x \neq \pm 1$ platí

$$\begin{aligned}\frac{1}{4x-4} - \frac{x-1}{2x+2} &= \frac{1}{1-x^2}, \\ \frac{1-x}{2(1+x)} - \frac{1}{4(1-x)} &= \frac{1}{1-x^2}, \\ (1-x)^2 - (1+x) &= 4, \\ 2 - 4x + 2x^2 - 1 - x &= 4, \\ 2x^2 - 5x - 3 &= 0.\end{aligned}$$

Tato kvadratická rovnice má diskriminant $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$, který je kladný. Rovnice má dva reálné kořeny

$$x_1 = 3 \quad \text{a} \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Závěr. Rovnice má dva reálné kořeny $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Metodické poznámky

Při řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ nejdříve vypočteme diskriminant $D = b^2 - 4ac$. Jsou tři možnosti

1. Je-li $D < 0$, nemá rovnice v oboru reálných čísel žádné řešení.
2. Je-li $D = 0$, má rovnice dva kořeny, které jsou si rovny

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3. Je-li $D > 0$, má rovnice dva různé reálné kořeny, které vypočteme pomocí vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: Viètovy vztahy mezi kořeny a koeficienty normované kvadratické rovnice

Je dána funkce $y = -2x^2 - 8x - 6$. Vypočítejte obsah trojúhelníku, jehož vrcholy jsou průsečíky grafu funkce f se souřadnicovými osami.

Řešení

Průsečík trojúhelníku s osou y má souřadnici $y = -6$. Dostaneme ji dosazením jeho souřadnice $x = 0$ do rovnice funkce. Číslo $|-6|$ je výškou trojúhelníku. Průsečíky s osou x určují základnu trojúhelníku, oba mají souřadnici $y = 0$ a jejich x -ové souřadnice jsou řešením rovnice $-2x^2 - 8x - 6 = 0$, kterou dostaneme z rovnice funkce dosazením nuly za y . Po krácení číslem -2 dostaneme ekvivalentní normovanou kvadratickou rovnici $x^2 + 4x + 3 = 0$. Její kořeny určíme zpaměti pomocí vzorců

$$x_1 + x_2 = -4 \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = 3,$$

tedy $x_1 = -1$ a $x_2 = -3$. Základna má délku 2. Obsah trojúhelníku je $2 \cdot 3 = 6$.

Závěr. Obsah trojúhelníku je 6.

Metodické poznámky

Normovaná kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ má u kvadratického členu koeficient roven 1, $p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q \geq 0$. Má-li kořen x_1 , pak má také kořen x_2 a platí

$$x_1 + x_2 = -p, \quad \wedge \quad x_1 x_2 = q.$$

Těmto vzorcům se říká Viètovy vzorce podle francouzského matematika, který se jmenoval Francoise Viète a žil v letech 1540–1603. Možnost jejich užití je, zejména ve školské matematice, velmi častá. Možnost určení kořenů zpaměti je okamžitá. Proto při každém řešení normované kvadratické rovnice, zejména s celočíselnými koeficienty, je vhodné nejprve se zamyslet zda těchto vzorců nelze požit. A teprve potom hledáme kořeny pomocí diskriminantu a známých vzorců.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: rovnice přímky a paraboly v rovině, tečna, kvadratická rovnice

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -(1-x)^2 - 1 &= y, \\ 2x + y - 3m + 1 &= 0 \end{aligned}$$

s reálným parametrem m .

- Určete hodnoty parametru m tak, aby soustava měla jedno řešení.
- Určete toto řešení.
- Jaký je geometrický význam úlohy?

Řešení

Z lineární rovnice $2x + y - 3m + 1 = 0$ vyjádříme $y = -2x + 3m - 1$ a dosadíme do rovnice kvadratické, dostaneme

$$-2x + 3m - 1 = -(1 - x)^2 - 1.$$

Po úpravě $x^2 - 4x + 3m + 1 = 0$.

a) Tato kvadratická rovnice má dvojnásobné řešení, právě když její diskriminant

$$D = (-4)^2 - 4(3m + 1) = 0.$$

To nastane právě tehdy, je-li $m = 1$.

b) Pro $m = 1$ dostáváme rovnici $x^2 - 4x + 4 = 0$, která má dvojnásobný kořen $x = 2$; odtud určíme hodnotu $y = -2$.

c) Rovnice $2x + y - 3m + 1 = 0$ je vyjádřením množiny vzájemně rovnoběžných přímk, neboli směru, daným normálovým vektorem $\mathbf{n} = (2; 1)$, resp. směrovým vektorem $\mathbf{s} = (1; -2)$. Řešit tuto úlohu znamená najít z této množiny rovnoběžných přímk tu, která je tečnou dané paraboly $y = -(1 - x)^2 - 1$. Tečna má rovnici $2x + y - 2 = 0$ s dotykovým bodem $T[2; -2]$.

Závěr. K parabole, která je dána kvadratickou rovnicí, máme najít tečnu rovnoběžnou s daným směrem, ten je dán lineární rovnicí. Hledaná tečna má rovnici $2x + y - 2 = 0$ a dotykový bod s parabolou je $T[2; -2]$.

Metodické poznámky

Úloha je ukázkou výpočtu tečny k parabole v analytické geometrii pomocí řešení kvadratické rovnice. V rovnici paraboly

$$y = -(1 - x)^2 - 1 = -x^2 + 2x - 2$$

má kvadratický člen záporný koeficient, odtud plyne, že parabola je otevřená zdola. Má svislou osu s rovnicí $x = 1$ a vrchol $V[1; -1]$. Tečnou je přímka s rovnicí $y = -2x + 2$ a bodem dotyku $T[2; -2]$. Prochází ještě například bodem $[0; 2]$, takže si snadno můžeme nakreslit graf celé úlohy.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: číselná posloupnost, dělitelnost, důkazy v matematice

Úloha 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: pojem posloupnosti, kritérium dělitelnosti čtyřmi, princip důkazu přímého

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je n -tý člen definován předpisem $a_n = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{55\dots5}_{n-1} 6$. Dokažte přímým důkazem, že každý člen této posloupnosti je dělitelný čtyřmi.

Řešení

Prvních několik členů posloupnosti je

$$a_1 = 16, \quad a_2 = 1156, \quad a_3 = 111556, \dots$$

Kritérium dělitelnosti čtyřmi říká, že musí být poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi, což je u každého členu posloupnosti splněno.

Závěr. Dokázali jsme důkazem přímým, že každý člen dané posloupnosti je dělitelný čtyřmi.

Metodické poznámky

Úloha je obtížnější v tom, že není úplně jasná představa n -tého členu posloupnosti. Dělitelnost čtyřmi je pak triviální. Zřejmě je nutné před samotným řešením zopakovat princip přímého důkazu. Určitě by bylo možné po přeformulování zadání řešit tuto úlohu před probráním posloupností, tj. jako procvičovací úlohu pro důkaz přímý.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: pojem posloupnosti, kritérium dělitelnosti čtyřmi, princip důkazu přímého

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je n -tý člen definován předpisem $a_n = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{55\dots5}_{n-1} 6$. Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ má n -tý člen definován předpisem $b_n = a_{n+1} - a_n$. Vyjádřete b_n ve stejném varu jako a_n a dokažte přímým důkazem, že každý člen posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je dělitelný čtyřmi.

Řešení

Určíme si n -tý člen posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Je $b_1 = a_2 - a_1 = 1\,156 - 16 = 1\,140$. Pro $n \geq 2$ uděláme výpočet

$$\begin{array}{r} 1111 \dots 1555 \dots 56 \\ - 11 \dots 1155 \dots 56 \\ \hline 1100 \dots 0400 \dots 00 \end{array}$$

Je tedy $b_n = 11 \underbrace{00 \dots 0}_{n-1} 4 \underbrace{00 \dots 00}_n$.

Závěr. Dokázali jsme důkazem přímým, že každý člen posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je dělitelný čtyřmi, neboť jeho poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi.

Poznámka. Také bychom při důkazu mohli postupovat následujícím způsobem. Jelikož je definováno $b_n = a_{n+1} - a_n$ a víme z předcházející úlohy, že a_{n+1} i a_n jsou dělitelné čtyřmi, vychází nám z toho, že i b_n je dělitelné čtyřmi.

Metodické poznámky

Oproti předchozí úloze je obtížné učit členy posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, samotný důkaz o dělitelnosti i princip důkazu přímého je díky první úloze už jednodušší. Je nutné upozornit na to, že je třeba zvlášť počítat první člen nové posloupnosti, i když se pak první člen dá vyjádřit stejně jako ty ostatní.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: pojem posloupnosti, kritérium dělitelnosti čtyřmi, princip důkazu matematickou indukcí

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je n -tý člen definován předpisem $a_n = \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{55 \dots 5}_{n-1} 6$. Dokažte matematickou indukcí, že každý člen této posloupnosti je dělitelný čtyřmi.

Řešení

Nejprve zjistíme, že první člen $a_1 = 16$ je dělitelný čtyřmi.

Předpokládejme, že pro libovolné přirozené číslo n je člen $a_n = \underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{55 \dots 5}_{n-1} 6$ dělitelný čtyřmi, a dokážeme, že i následující člen $a_{n+1} = \underbrace{11 \dots 1}_{n+1} \underbrace{55 \dots 5}_n 6$ je dělitelný čtyřmi. Využijeme výsledku předcházející úlohy, kde jsme měli uvedeno, že $b_n = a_{n+1} - a_n$, a dokázali jsme tam, že všechny členy b_n jsou dělitelné čtyřmi. Když nyní vyjádříme $a_{n+1} = b_n + a_n$, a využijeme toho, že i b_n i a_n jsou dělitelné čtyřmi, vychází nám z toho, že a_{n+1} je také dělitelné čtyřmi.

Závěr. Dokázali jsme matematickou indukcí, že každý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dělitelný čtyřmi.

Metodické poznámky

Po vyřešení předchozích úloh je už jasná představa každého členu posloupnosti. V této úloze je třeba nově znát principi matematické indukce. Opět je dobré před samotným řešením zopakovat princip matematické indukce. Určitě by bylo možné po přeformulování zadání řešit tuto úlohu před probráním posloupností, tj. jako procvičovací úlohu pro matematickou indukci.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: lineární rovnice, soustava rovnic

Úloha 1 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice s parametrem

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$10a + 7b + 2c = 186,$$

$$3a + 2b + 2c = 71.$$

Řešení

Při řešení soustavy dvou lineárních rovnic o třech neznámých v oboru reálných čísel považujeme jednu neznámou za parametr. Zvolme zde za parametr např. neznámou a , tj. $a = t$.

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $7a + 5b = 115$, odkud $b = 23 - \frac{7}{5}a$ a

$$2c = 71 - 3a - 2b = 71 - 3a - 46 + \frac{14}{5}a.$$

Závěr. Řešením soustavy je $a = t$, $b = 23 - \frac{7}{5}t$, $c = \frac{25}{2} - \frac{1}{10}t$, kde t je libovolné reálné číslo.

Metodické poznámky

Soustava dvou lineárních rovnic o třech neznámých se řeší např. v analytické geometrii, když se zjišťuje vzájemná poloha dvou rovin. Je vhodnou ukázkou využití parametru při řešení rovnic

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice s parametrem, diskuse vzhledem k parametru

V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$10a + 7b + 2c = 186,$$

$$3a + 2b + 2c = 71.$$

Řešení

Využijeme výsledek z úlohy 1 a upravíme její řešení tak, aby bylo z oboru celých čísel. Nejprve upravíme řešení $c = \frac{25}{2} - \frac{1}{10}a = 12 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10}a$ a zavedeme substituci $k = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}a$. Odtud je $a = 5 - 10k$, $b = 23 - \frac{7}{5}(5 - 10k) = 16 + 14k$.

Závěr. Řešení rovnice mají tvar $a = 5 - 10k$, $b = 16 + 14k$, $c = 12 + k$, kde k je libovolné celé číslo.

Metodické poznámky

Řešení soustavy dvou diofantovských rovnic v RVP G obsaženo není. Uvedené řešení však nevyžaduje znalost algoritmu na řešení lineárních diofantovských rovnic, vyžaduje pouze snadnou úpravu a úvahu, aby parametr nabýval celočíselných hodnot. Geometrická reprezentace této úlohy: na dané přímce vybíráme jen body s celočíselnými souřadnicemi.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice s parametrem, diskuse vzhledem k parametru, trojúhelníková nerovnost

Je dána soustava rovnic

$$10a + 7b + 2c = 186,$$

$$3a + 2b + 2c = 71.$$

Řešte danou soustavu za podmínky, že a , b , c jsou celočíselné délky stran trojúhelníku.

Řešení

Složky řešení a , b , c vypočtené v úloze 2 musí zároveň splňovat trojúhelníkové nerovnosti $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, což znamená, že celočíselný parametr k z úlohy 2 musí splňovat po řadě nerovnosti $k > -3$, $k > -\frac{23}{25}$, $k < \frac{1}{23}$. Těmto třem nerovnostem vyhovuje pouze $k = 0$.

Závěr. Existuje jediná trojice přirozených čísel $a = 5$, $b = 16$, $c = 12$ jako řešení úlohy.

Metodické poznámky

Díky požadavku na využití trojúhelníkové nerovnosti řeší žáci navíc jednoduché lineární nerovnice.

Zdroj:

Zhouf, J.: *Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku*. Praha: PedF UK, 2010

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.; jaroslav.zhouf@pedf.cuni.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: soustava lineárních rovnic, parametry

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: řešení soustavy lineárních rovnic, dosazování

Řešte soustavu

$$x - 2y = 5a,$$

$$2x + y = 5,$$

kde a je reálný parametr. Po výpočtu a zápisu řešení dokažte, že dvojice $[2; 1]$ je jedním z řešení soustavy a zjistěte příslušnou hodnotu parametru.

Řešení

Druhou rovnici násobíme dvěma a sečteme s rovnicí první; dostaneme postupně

$$x - 2y = 5a,$$

$$4x + 2y = 10,$$

pak $5x = 10 + 5a$ a z toho $x = 2 + a$. Ze druhé rovnice je $y = 5 - 2x$; dosadíme za x :

$$y = 5 - 2(2 + a) = 1 - 2a.$$

Výsledným řešením je dvojice $[2 + a, 1 - 2a]$, $a \in \mathbb{R}$.

Pro dvojici $[2; 1]$, pokud je řešením, musí být splněno $(2 + a = 2) \wedge (1 - 2a = 1)$. Vidíme, že obě tyto rovnosti jsou splněny právě pro $a = 0$, takže dvojice $[2; 1]$ je řešením zadané soustavy.

Metodické poznámky

V této úvodní úloze je parametr při samotném řešení nepodstatný, význam má až ve výsledku. Řešitelé si totiž musí uvědomit, že soustava má nekonečně mnoho řešení v závislosti na hodnotě a .

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: řešení soustavy lineárních rovnic, dosazování a ekvivalentní operace s rovnicemi, zlomky s písmeny

Řešte soustavu

$$x - 2y = a,$$

$$2x + ay = 4,$$

kde a je reálný parametr. Po zápisu řešení ověřte výsledek pro $a = 2$ a to: přímým výpočtem po dosazení $a = 2$ do zadané soustavy a dosazením za a do obecného výsledku.

Řešení

První rovnici násobíme dvěma a odečteme od druhé; dostaneme základní vztah pro práci s parametrem

$$(a + 4)y = 4 - 2a.$$

Vidíme, že rovnici nelze dělit výrazem $a + 4$, proto rozlišíme dva případy.

a) Pro $a = -4$ máme $0 \cdot y = 12$, soustava nemá řešení.

b) Pro $a \neq -4$ je $y = 2 \cdot \frac{2 - a}{a + 4}$.

Z první rovnice zadané soustavy je $x = 2y + a$, takže

$$x = 2 \cdot 2 \cdot \frac{2 - a}{a + 4} + a = \frac{8 - 4a + a^2 + 4a}{a + 4} = \frac{a^2 + 8}{a + 4}.$$

Výsledné řešení je

$$\left[\frac{a^2 + 8}{a + 4}; \frac{4 - 2a}{a + 4} \right], \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}.$$

Pro $a = 2$ má zadaná soustava tvar

$$\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4; \end{aligned}$$

po sečtení těchto rovnic máme $3x = 6$, takže $x = 2$, a po dosazení této hodnoty do 1. rovnice dostáváme $y = 0$. Řešení soustavy je $[2; 0]$.

Dosazení hodnoty $a = 2$ do výrazu pro x dává

$$\frac{a^2 + 8}{a + 4} = \frac{4 + 8}{2 + 4} = 2,$$

a ve výrazu pro y je v čitateli $4 - 2a$, takže dostáváme 0.

Tím je potvrzeno, že pro $a = 2$ je řešením dané soustavy dvojice $[2; 0]$.

Metodické poznámky

V této úloze se při řešení vyskytuje ten nejjednodušší případ práce s parametrem, kdy součinitel je nula nebo je různý od nuly.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Řešení soustav, práce s parametry, ekvivalentní úpravy rovnic

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x - 2y + 2a &= 0, \\ ax - 6y + 18 &= 0, \end{aligned}$$

kde a je reálný parametr. Pak zjistěte, pro kterou hodnotu parametru má soustava řešení $[6; 6]$.

Řešení

Z první rovnice vyjádříme $x = 2y - 2a$ a dosadíme je do druhé rovnice

$$a(2y - 2a) - 6y + 18 = 0;$$

rovnici dělíme dvěma a provedeme naznačené operace; dostaneme

$$ay - a^2 - 3y + 9 = 0,$$

odkud chceme vypočítat y ; nejprve dostaneme $y(a - 3) = a^2 - 9$ a po rozkladu pravé strany pak základní stav této rovnice

$$y(a - 3) = (a - 3)(a + 3).$$

Musíme tedy rozlišovat dva případy, neboť pro $a = 3$ nelze tuto rovnici dělit výrazem $(a - 3)$

a) Necht $a = 3$; tuto hodnotu dosadíme do zadané soustavy:

$$\begin{aligned}x - 2y + 6 &= 0, \\3x - 6y + 18 &= 0.\end{aligned}$$

Jestliže druhou rovnici dělíme třemi, vidíme, že je shodná s rovnicí první. Z této rovnice vyjádříme x a dostaneme $x = 2y - 6$. Soustava má tak nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[2y - 6; y]$, $y \in \mathbb{R}$.

b) Pro $a \neq 3$ dělíme základní rovnici výrazem $(a - 3)$ a dostaneme $y = a + 3$. Z 1. rovnice zadané soustavy je $x = 2y - 2a$; dosadíme sem za y

$$x = 2(a + 3) - 2a \quad \text{a odsud} \quad x = 2a + 6 - 2a = 6.$$

Výsledné řešení je tak $[6; a + 3]$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Má-li mít soustava řešení $[6; 6]$, pak při porovnání s předchozím výsledkem dostáváme rovnosti

$$6 = 6, \quad 6 = a + 3,$$

odsud $a = 3$. Ale pozor, navázali jsme tu na případ b), v němž se předpokládalo $a \neq 3$. Proto se musíme vrátit k případu a), kde $a = 3$, a ověřit si, zda řešení $[6; 6]$ skutečně můžeme získat. Má tedy platit

$$6 = 2y - 6, \quad 6 = y.$$

Vidíme, že pro $y = 6$ je i $x = 2y - 6 = 6$.

Zadaná soustava má tedy řešení $[6; 6]$ pro hodnotu $a = 3$.

Metodické poznámky

Při řešení se rozlišují dva případy, kdy součinitel je nula nebo je různý od nuly. Ve druhé části úlohy se musí dát pozor na předpokládané hodnoty parametru.

Úloha 4 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: řešení soustav v nestandardním tvaru, práce s parametry, ekvivalentní úpravy rovnic

Řešte soustavu

$$\begin{aligned}p(y + 2) - 2(3 + 2x) &= 0, \\ y - px + 5 &= 0,\end{aligned}$$

kde p je reálný parametr.

Řešení

Ze druhé rovnice vyjádříme $y = px - 5$ a dosadíme je do první rovnice, dostaneme $p(px - 5 + 2) - 2(3 + 2x) = 0$; roznásobíme a upravujeme na základní tvar

$$\begin{aligned}p^2x - 4x &= 3p + 6, \\ x(p - 2)(p + 2) &= 3(p + 2).\end{aligned}$$

Uvážíme nyní zvláštní případy.

1. Pro $p = -2$ nám základní tvar řešení nenapoví, dosadíme je do zadané soustavy.

$$\begin{aligned}-2(y + 2) - 2(3 + 2x) &= 0, \\ y + 2x + 5 &= 0.\end{aligned}$$

První rovnici ještě upravíme: $-2y - 4x - 10 = 0$; vidíme že to je násobek rovnice druhé. Soustavě pak vyhovuje každá dvojice, kde k danému x je $y = -2x - 5$, tedy každá dvojice $[x; -2x - 5]$, kde $x \in \mathbb{R}$.

2. Pro $p \neq -2$ můžeme základní rovnici dělit výrazem $p + 2$ a dostaneme

$$x(p - 2) = 3.$$

a) Pro $p = 2$ tedy zadaná soustava nemá řešení.

b) Necht $p \neq \pm 2$, pak

$$x = \frac{3}{p - 2}, \quad y = px - 5 = p \cdot \frac{3}{p - 2} - 5 = \frac{3p - 5p + 10}{p - 2} = -2 \cdot \frac{p - 5}{p - 2}.$$

Řešením dané soustavy jsou dvojice $\left[\frac{3}{p - 2}; -\frac{2p - 10}{p - 2} \right]$, kde $p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Metodické poznámky

V případě 2a je vhodné, aby si řešitelé dosadili $p = 2$ do zadané soustavy a jejím řešením poznali, proč platí uvedený závěr.

Úloha 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: Řešení soustav v nestandardním tvaru, práce s parametry, ekvivalentní úpravy a řešení rovnic s písmeny, zlomky s písmeny

Řešte soustavu

$$\begin{aligned} s(y+2) + 2(1-2x) &= 0, \\ y - sx + 3 &= 0, \end{aligned}$$

kde s je reálný parametr. Pak zjistěte, zda má tato soustava řešení typu $[t; 3t]$.

Řešení

Ze druhé rovnice vyjádříme $y = sx - 3$ a dosadíme je do první rovnice

$$s(sx - 3 + 2) + 2 - 4x = 0;$$

roznásobíme a upravujeme na základní tvar

$$x(s^2 - 4) = s - 2 \Rightarrow x(s-2)(s+2) = s-2.$$

Uvážíme zvláštní případy.

1. Pro $s = 2$ nám základní tvar žádnou informaci neposkytuje, takže se vrátíme k zadané soustavě, kam dosadíme $s = 2$

$$\begin{aligned} 2(y+2) + 2(1-2x) &= 0, \\ y - 2x + 3 &= 0, \end{aligned}$$

první rovnici ještě upravíme na tvar $2y - 4x + 6 = 0$, odtud vidíme, že to je násobek rovnice první. Soustavě pak vyhovuje každá dvojice, kde k danému x je $y = 2x - 3$, tedy každá dvojice $[x; 2x - 3]$, kde $x \in \mathbb{R}$.

2. Pro $s \neq 2$ můžeme základní rovnici dělit výrazem $s - 2$ a dostaneme $x(s+2) = 1$;
 - a) Pro $s = -2$ tedy zadaná soustava nemá řešení.
 - b) Necht $s \neq \pm 2$, pak

$$x = \frac{1}{s+2}, \quad y = sx - 3 = s \cdot \frac{1}{s+2} - 3 = \frac{s - 3s - 6}{s+2} = -2 \cdot \frac{s+3}{s+2}.$$

Řešením zadané soustavy jsou dvojice $\left[\frac{1}{s+2}; -\frac{2s+6}{s+2} \right]$, kde $s \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Nyní budeme vyšetřovat, zda má zadaná soustava řešení typu $[t; 3t]$.

1. V případě $s = 2$, kdy řešení je tvaru $[x; 2x - 3]$, položíme $x = t$, $y = 2x - 3 = 3t$. Jelikož $x = t$, platí ve druhém vztahu $2t - 3 = 3t$, tedy $t = -3$, a máme řešení $[-3; -9]$ žádaného typu.
2. Pro $s \neq \pm 2$ položíme

$$x = \frac{1}{s+2} = t, \quad y = -2 \cdot \frac{s+3}{s+2} = 3t,$$

neboli

$$-2 \cdot \frac{s+3}{s+2} = 3 \cdot \frac{1}{s+2}.$$

Po vynásobení této rovnice výrazem $s+2$ a roznásobení na levé straně dostáváme $-2s-6=3$, tedy $s=-4,5$. Pak

$$x = \frac{1}{-4,5+2} = \frac{1}{-2,5} = -\frac{2}{5},$$
$$y = 3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{6}{5}.$$

Dostali jsme tak 2. řešení požadovaného typu: $\left[-\frac{2}{5}; -\frac{6}{5}\right]$.

Metodické poznámky

Doporučuje se, aby si řešitelé ověřili správnost dvou nalezených řešení řešení typu $[t, 3t]$ zkouškou.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice s parametrem, kvadratická rovnice, normovaná kvadratická rovnice, nerovnice, nerovnice v podílovém tvaru

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: soustava lineárních rovnic s parametrem, lineární rovnice s parametrem, lineární nerovnice

Pro která reálná čísla a má soustava rovnic

$$ax - y = -3,$$

$$5x + 3y = 30,$$

kladné reálné řešení?

Řešení

Použijeme aditivní metodu. První rovnici vynásobíme třemi a obě rovnice sečteme. Dostaneme tak (pro $a \neq -\frac{5}{3}$) po úpravě

$$x = \frac{21}{3a + 5}.$$

Dosadíme do první rovnice a získáme

$$a \cdot \frac{21}{3a + 5} - y = -3$$

a opět vyjádříme neznámou, nyní

$$y = \frac{30a + 15}{3a + 5}.$$

Ze zadání víme, že $x > 0$ a zároveň $y > 0$. Po dosazení za x a y řešíme soustavu dvou nerovnic s neznámou a

$$\frac{21}{3a + 5} > 0, \quad \frac{30a + 15}{3a + 5} > 0.$$

Z první nerovnice je zřejmé, že $3a + 5 > 0$, proto hned dostáváme $a > -\frac{5}{3}$ tedy $a \in (-\frac{5}{3}; \infty)$. Pro druhou nerovnici musí platit

$$((3a + 5 > 0) \wedge (30a + 15 > 0)) \vee ((3a + 5 < 0) \wedge (30a + 15 < 0)),$$

po úpravě dostaneme $a \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$. Průnikem těchto dvou dílčích řešení je interval $(-\frac{1}{2}; \infty)$.

Závěr. Aby soustava měla kladné reálné řešení, musí platit $a \in (-\frac{1}{2}; \infty)$.

Metodické poznámky

Tato úloha umožňuje zopakování řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých, nerovnic v podílovém tvaru, soustav dvou nerovnic o jedné neznámé, práci s intervaly, vyjádření neznámé ze vzorce. Je vhodná k závěrečnému opakování v části rovnice a nerovnice.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: kvadratická rovnice s parametrem, vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Pro která reálná čísla m má kvadratická rovnice

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m-2 = 0$$

dva kladné reálné kořeny?

Řešení

Pro $m = 1$ dostaneme lineární rovnici $-4x - 1 = 0$, což není kvadratická rovnice, dále proto předpokládáme $m \neq 1$.

Aby existovaly dva reálné kořeny, musí být diskriminant D kladný, přitom

$$D = (-2(m+1))^2 - 4(m-1)(m-2) = 20m - 4.$$

Řešením nerovnice $20m - 4 > 0$ dostaneme $m > \frac{1}{5}$.

Aby dva kořeny normované kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ byly kladné, musí platit $q > 0$, $-p > 0$. Danou rovnici upravíme na normovaný tvar

$$x^2 - \frac{2(m+1)}{m-1} \cdot x + \frac{m-2}{m-1} = 0.$$

Platí tedy $\frac{m-2}{m-1} > 0$ a současně $\frac{2(m+1)}{m-1} > 0$. Řešení těchto nerovnic dostaneme

$$m \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty).$$

Z podmínky $m > \frac{1}{5}$ nakonec dostaneme $m > 2$.

Závěr. Kvadratická rovnice $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m-2 = 0$ má dva kladné kořeny pro hodnotu parametru $m > 2$.

Metodické poznámky

Opět můžeme pro ilustraci vyřešit rovnici pro parametr větší než 2, menší než 2, popřípadě poukázat na případ kdy $m = 2$ (pak dostaneme rovnici bez absolutního členu, kde $x = 6$ nebo $x = 0$). Úlohu lze rozšířit požadavek úplného řešení či otázku, kdy je alespoň jeden kořen kladný, čímž nevyločíme ani možnou lineární rovnici či dvojnásobný kořen.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice s parametrem, lineární nerovnice, nerovnice v podílovém tvaru, kvadratická rovnice

Proveďte úplnou diskusi řešení rovnice

$$\frac{5}{2x - a} = \frac{3}{4 - ax}$$

vzhledem k parametru a . Zjistěte pro jaké hodnoty parametru a je x kladné, záporné a nula. Výsledek napište do tabulky.

Řešení

Nutné podmínky řešitelnosti jsou $x \neq \frac{a}{2}$ a zároveň $x \neq \frac{4}{a}$.

Rovnici upravíme na $x(6 + 5a) = 3a + 20$ a jestliže $(6 + 5a) \neq 0$, vyjádříme neznámou

$$x = \frac{3a + 20}{6 + 5a}.$$

Pro $a = -\frac{6}{5}$ nemá rovnice řešení. Pro $a \neq -\frac{6}{5}$ je $x = \frac{3a+20}{6+5a}$, nutná podmínka řešitelnosti dává $x \neq \frac{a}{2}$ a zároveň $x \neq \frac{4}{a}$. Proto

$$\frac{3a + 20}{6 + 5a} \neq \frac{a}{2} \quad \text{a} \quad \frac{3a + 20}{6 + 5a} \neq \frac{4}{a},$$

odkud v obou případech $|a| \neq 2\sqrt{2}$. Pro $a = \pm 2\sqrt{2}$ tedy nemá rovnice smysl.

Jestliže $3a + 20 = 0$, tedy $a = -\frac{20}{3}$, pak $x = 0$. Abychom určili, pro které hodnoty a je x kladné, položíme $\frac{3a+20}{6+5a} > 0$ a vyřešíme rovnici v podílovém tvaru. Výsledky zapíšeme do tabulky.

Závěr. Daná rovnice má řešení

$$x = \frac{3a + 20}{6 + 5a}$$

za těchto podmínek pro parametr a .

$a \in (-\infty; -\frac{20}{3})$	$x > 0$
$a = -\frac{20}{3}$	$x = 0$
$a \in (-\frac{20}{3}; -2\sqrt{2})$	$x < 0$
$a = -2\sqrt{2}$	Rovnice nemá řešení
$a \in (-2\sqrt{2}; -\frac{6}{5})$	$x < 0$
$a = -\frac{6}{5}$	Rovnice nemá řešení
$a \in (-\frac{6}{5}; 2\sqrt{2})$	$x > 0$
$a = 2\sqrt{2}$	Rovnice nemá řešení
$a \in (2\sqrt{2}; \infty)$	$x > 0$

Metodické poznámky

Jedná se sice o lineární rovnici s neznámou ve jmenovateli, ale vzhledem k podmínkám a požadavku diskuse, kdy je x kladné, záporné a nula je úloha vhodná k procvičení lineární a kvadratické rovnice i nerovnice v podílovém tvaru. Zápis do tabulky umožní studentům si více uvědomit, co je neznámá a co je parametr.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Lenka Machková; machkova@gjkt.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: soustava rovnic, metoda eliminační, aditivní, substituční, parametr

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: metoda aditivní, eliminační, dosazovací

Řešte soustavu rovnic

$$7x + 12y = 71,$$

$$21x - 4y = 93.$$

Řešení

Úlohu lze řešit mnoha známými metodami, jako je grafické řešení, aditivní metodou, eliminační nebo dosazovací. Zvolme například metodu eliminační.

Vynásobíme druhou rovnici číslem 3 a obě rovnice sečteme, odtud $70x = 350$, tedy $x = 5$. Dosazením za x do libovolné ze zadaných rovnic dostáváme $y = 3$. Vzhledem k použitým ekvivalentním úpravám není nutné provádět zkoušku.

Závěr. Řešením je uspořádaná dvojice $(x, y) = (5; 3)$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: substituční metoda

Firma vyrábí tři modely sportovních kalhot K_1 , K_2 , K_3 . Každý z modelů vyžaduje práci tří dílen: střih, šití a balení. Odpovídající časová náročnost (v hodinách) na zhotovení jednoho kusu každého modelu a maximální týdenní kapacita jednotlivých dílen je uvedena v tabulce.

	K_1	K_2	K_3	kapacity dílen
střih	0,2	0,4	0,3	116
šití	0,3	0,5	0,4	156
balení	0,1	0,2	0,1	48

Kolik kusů každého modelu je nutno týdně vyrábět tak, aby byly plně využity kapacity všech dílen?

Řešení

Označme x počet kusů modelu K_1 , y počet kusů modelu K_2 a z počet kusů modelu K_3 . Pak platí

$$0,2x + 0,4y + 0,3z = 116,$$

$$0,3x + 0,5y + 0,4z = 156,$$

$$0,1x + 0,2y + 0,1z = 48.$$

Z poslední rovnice vyjádříme $x = 480 - 2y - z$ a dosadíme do zbývajících rovnic, dostaneme

$$\begin{aligned}0,1z &= 20, \\ -0,1y + 0,1z &= 12.\end{aligned}$$

Odtud bezprostředně plyne, že $z = 20$, $y = 80$ a $x = 120$.

Závěr. Pro maximální využití všech dílen je nutné vyrobit 120 kusů kalhot K_1 , 80 kusů kalhot K_2 a 200 kusů kalhot K_3 .

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: sčítací metoda, parametr

V oboru reálných čísel je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3, \\ 2x - 2y + 3z &= 5, \\ 3x - y + 4z &= a.\end{aligned}$$

Určete, pro jaká reálná čísla a soustava rovnic:

- a) nemá řešení,
- b) má nekonečně mnoho řešení,
- c) má právě jedno řešení.

Řešení

Sečteme-li první dvě rovnice, dostaneme $3x - y + 4z = 8$. Porovnáním s třetí rovnicí vidíme, že pro $a \neq 8$ soustava nemá řešení, pro $a = 8$ má nekonečně mnoho řešení (ve tvaru $(4 - 5p, p, 4p - 1)$, kde $p \in \mathbb{R}$). Příklad c) nenastane pro žádné reálné a .

Metodické poznámky

Jednotlivé rovnice soustavy představují v analytické geometrii rovnice rovin eukleidovského prostoru dimenze 3. Řešení soustavy tak představuje hledání společných bodů tří rovin. Pro $a \neq 8$ se jedná o roviny s rovnoběžnými průsečnicemi, v případě b) o roviny procházející stejnou přímkou (svazek rovin).

Úloha k procvičení úrovně 3.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic v závislosti na reálném parametru a

$$\begin{aligned}2x + ay &= 3a + 1, \\ ax + 2y &= 5.\end{aligned}$$

[Výsledek: Pro $a = 2$ soustava nemá řešení, pro $a = -2$ má soustava nekonečně mnoho řešení ve tvaru $\left(x, \frac{5 - ax}{2}\right)$ a pro $a \neq \pm 2$ má soustava jediné řešení $\left(\frac{1}{2 - a}, \frac{5 - 3a}{2 - a}\right)$.]

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Václav Vaněk; vvanek1@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice s absolutní hodnotou, rovnice s parametrem

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: lineární rovnice, absolutní hodnota

V intervalu $\langle -2; 2 \rangle$ řešte rovnici

$$3x - |3x + 2| + 2|x - 2| = 1.$$

Řešení

Pro každé $x \in \langle -2; 2 \rangle$ platí $x - 2 \leq 0$, a proto $|x - 2| = -x + 2$. Interval $\langle -2; 2 \rangle$ rozdělíme nulovým bodem $-\frac{2}{3}$ na dva intervaly. V daných intervalech pak nahradíme výraz $|3x + 2|$ výrazem bez absolutní hodnoty.

1. Pro $x \in \langle -2; -\frac{2}{3} \rangle$ dostáváme rovnici

$$3x - (-3x - 2) + 2(-x + 2) = 1.$$

Její řešení je $x = -\frac{5}{4} \in \langle -2; -\frac{2}{3} \rangle$.

2. Pro $x \in \langle -\frac{2}{3}; 2 \rangle$ dostáváme rovnici

$$3x - (3x + 2) + 2(-x + 2) = 1.$$

Její řešení je $x = \frac{1}{2} \in \langle -\frac{2}{3}; 2 \rangle$.

Závěr. Řešením dané rovnice v intervalu $\langle -2; 2 \rangle$ je množina $\{-\frac{5}{4}; \frac{1}{2}\}$.

Metodické poznámky

Rovnice s absolutní hodnotou se řeší například, když hledáme průsečík grafu funkce s absolutní hodnotou a osy x .

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení rovnic s absolutní hodnotou

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$||2x| - 10| = 5.$$

Řešení

A) Pro každé $x \in (-\infty; 0)$ platí $|2x| = -2x$. V intervalu $(-\infty; 0)$ řešíme rovnici $|-2x - 10| = 5$. Interval $(-\infty; 0)$ rozdělíme nulovým bodem -5 na dva intervaly. V daných intervalech pak nahradíme výraz $|-2x - 10|$ výrazem bez absolutní hodnoty.

1. Pro $x \in (-\infty; -5)$ dostáváme rovnici

$$-2x - 10 = 5.$$

Jejím řešením je $x = -7,5 \in (-\infty; -5)$.

2. Pro $x \in \langle -5; 0)$ dostáváme rovnici

$$2x + 10 = 5.$$

Jejím řešením je $x = -2,5 \in \langle -5; 0)$.

B) Pro každé $x \in \langle 0; \infty)$ platí $|2x| = 2x$. V intervalu $\langle 0; \infty)$ řešíme rovnici $|2x - 10| = 5$. Interval $\langle 0; \infty)$ rozdělíme nulovým bodem 5 na dva intervaly. V daných intervalech pak nahradíme výraz $|2x - 10|$ výrazem bez absolutní hodnoty.

1. Pro $x \in \langle 0; 5)$ dostáváme rovnici

$$-2x + 10 = 5.$$

Jejím řešením je $x = 2,5 \in \langle 0; 5)$.

2. Pro $x \in \langle 5; \infty)$ dostáváme rovnici

$$2x - 10 = 5.$$

Jejím řešením je $x = 7,5 \in \langle 5; \infty)$.

Závěr. Množina všech řešení dané rovnice v oboru reálných čísel je

$$\{-7,5; -2,5; 2,5; 7,5\}.$$

Metodické poznámky

Řešení rovnice s vloženou absolutní hodnotou umožní žákům sestavit graf funkce s vloženou absolutní hodnotou.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení rovnic s vloženou absolutní hodnotou, graf lineární funkce

V oboru reálných čísel řešte graficky rovnici $||0,5x| - 10| = a$, kde a je reálný parametr.

Řešení

Sestrojíme graf funkce $f: y = ||0,5x| - 10|$.

A) Pro každé $x \in (-\infty; 0)$ platí $|0,5x| = -0,5x$. V intervalu $(-\infty; 0)$ sestrojíme graf funkce $y = |-0,5x - 10|$. Interval $(-\infty; 0)$ rozdělíme nulovým bodem -20 na dva intervaly. V daných intervalech pak nahradíme výraz $|-0,5x - 10|$ výrazem bez absolutní hodnoty.

1. Pro $x \in (-\infty; -20)$ dostáváme rovnici funkce

$$f_1: y = -0,5x - 10.$$

2. Pro $x \in \langle -20; 0)$ dostáváme rovnici funkce

$$f_2: y = 0,5x + 10.$$

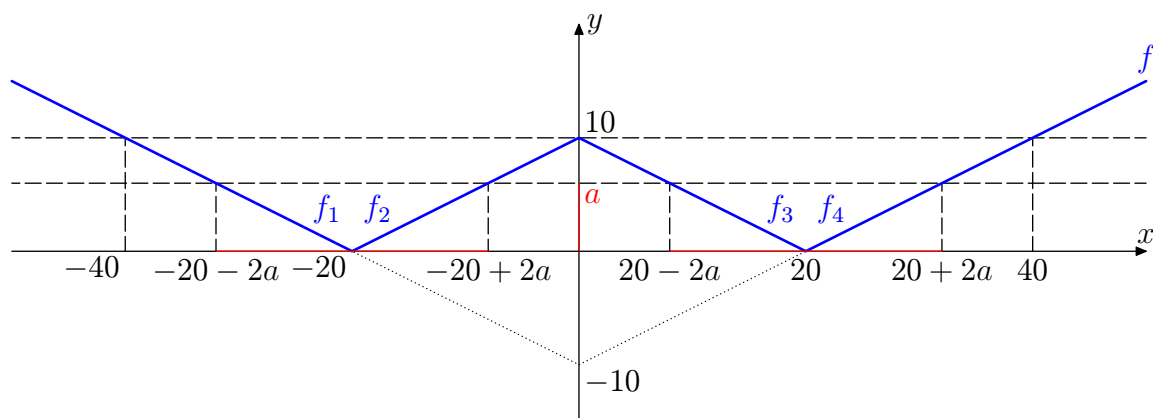
B) Pro každé $x \in \langle 0; \infty)$ platí $|0,5x| = 0,5x$. V intervalu $\langle 0; \infty)$ sestrojíme graf funkce $y = |0,5x - 10|$. Interval $\langle 0; \infty)$ rozdělíme nulovým bodem 20 na dva intervaly. V daných intervalech pak nahradíme výraz $|0,5x - 10|$ výrazem bez absolutní hodnoty.

1. Pro $x \in \langle 0; 20)$ dostáváme rovnici funkce

$$f_3: y = -0,5x + 10.$$

2. Pro $x \in \langle 20; \infty)$ dostáváme rovnici funkce

$$f_4: y = 0,5x - 10.$$



Obr. 1

Závěr. Z grafu funkce f na obr. 1 vidíme, že množina všech řešení dané rovnice závisí na parametru a následujícím způsobem

- | | |
|--------------------------|--|
| Pro $a \in (-\infty; 0)$ | je řešení $x \in \emptyset$. |
| Pro $a \in \{0\}$ | je řešení $x \in \{-20; 20\}$. |
| Pro $a \in (0; 10)$ | je řešení $x \in \{-20 - 2a; -20 + 2a; 20 - 2a; 20 + 2a\}$. |
| Pro $a \in \{40\}$ | je řešení $x \in \{-40; 0; 40\}$. |
| Pro $a \in (10; \infty)$ | je řešení $x \in \{-20 - 2a; 20 + 2a\}$. |

Metodické poznámky

Žáci mohou řešit rovnici $||0,5x| - 10| = a$ pro konkrétní hodnoty parametru a způsobem uvedeným v úloze 2 a následně ověřit správnost řešení uvedené v závěru úlohy 3.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora upravil Pavel Calábek

Autor: Mgr. Zdeněk Netopil; netopil@gjs.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: polorovina, nerovnice o dvou proměnných, úhel, trojúhelník, optimalizace

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění soustavy nerovnic o dvou proměnných

Znázorněte graficky úhel, který je průnikem polorovin

$$x + 2y \geq 0,$$

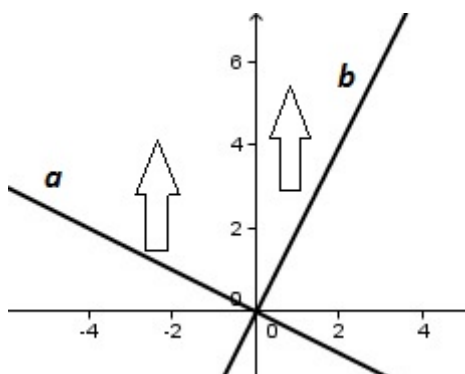
$$2x - y \leq 0.$$

Řešení (s použitím Geogebry)

Hranice těchto polorovin označíme a , b a zobrazíme je. O kterou polorovinu jde, zjistíme nejlépe tak, že si z nerovnic vyjádříme y :

- a) $y \geq -\frac{1}{2}x$, jde o polorovinu nad hranicí a ;
- b) $y \geq 2x$, i zde jde o polorovinu nad hranicí b .

Poloroviny vyznačíme šipkami a tím je zobrazen i příslušný úhel.



Metodické poznámky

Úloha není řešena v Geogebře, ta je použita jen pro znázornění přímek – hranic polorovin.

Úloha 2 (úroveň 1-2)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění soustavy nerovnic o dvou proměnných, řešení soustavy dvou rovnic

Znázorněte graficky úhel, který je průnikem polorovin

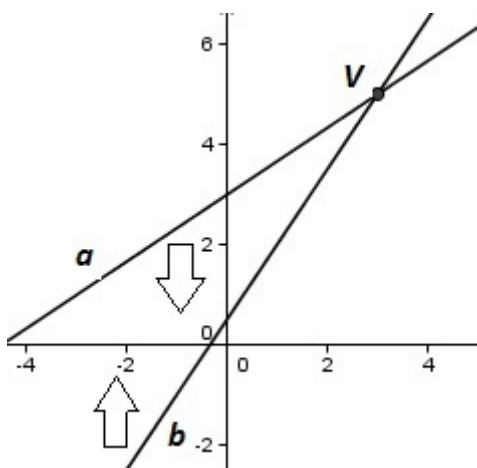
$$2x - 3y + 9 \geq 0,$$

$$3x - 2y + 1 \leq 0.$$

a vypočtete souřadnice jeho vrcholu V .

Řešení (s použitím Geogebry)

Hranice těchto polorovin označíme a , b a zobrazíme je. O kterou polorovinu jde, zjistíme v tomto případě nejlépe tak, že do nerovnic dosadíme počátek soustavy souřadnic, bod $[0; 0]$.



a) $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 9 > 0$, jde o stejnou polorovinu jako ta, v níž leží počátek,

b) $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 > 0$, jde o opačnou polorovinu než je ta, v níž leží počátek.

Poloroviny vyznačíme šipkami a tím je zobrazen i příslušný úhel. Souřadnice vrcholu V zjistíme řešením soustavy rovnic

$$2x - 3y + 9 = 0,$$

$$3x - 2y + 1 = 0.$$

První rovnici násobíme dvěma a druhou třemi:

$$4x - 6y + 18 = 0,$$

$$9x - 6y + 3 = 0$$

a od druhé rovnice odečteme první: $5x - 15 = 0$, tedy $x = 3$; po dosazení do první rovnice máme $2 \cdot 3 - 3y + 9 = 0$, odkud $y = 5$.

Vrchol úhlu je $V[3; 5]$.

Metodické poznámky

Stanovení patřičné poloroviny užitím počátku soustavy souřadnic je možné samozřejmě jen v případě, že hranice poloroviny neprochází počátkem, jako tomu bylo v úloze 1.

Úloha 3 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění soustavy tří nerovnic o dvou proměnných, řešení soustavy dvou rovnic

Jsou dány tři poloroviny:

$$x + y + 3 \geq 0,$$

$$x + 6y + 8 \geq 0,$$

$$3x - 2y - 6 \leq 0,$$

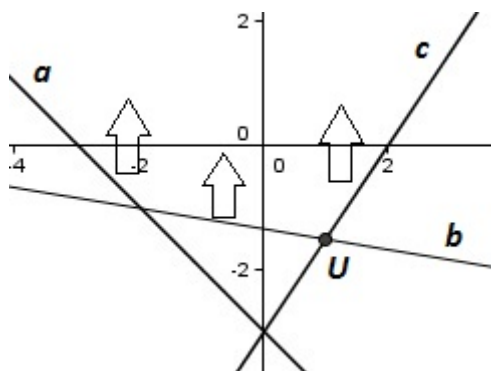
jejichž průnikem je množina M . Zobrazte ji a najděte takový její bod U , jehož y -ová souřadnice je nejmenší.

Řešení (s použitím Geogebry)

Hranice těchto polorovin označíme a , b , c a zobrazíme je. O kterou polorovinu jde, zjistíme opět pomocí počátku soustavy souřadnic, bodu $[0; 0]$, protože žádná z hranic neprochází počátkem.

- a) $0 + 0 + 3 > 0$, první polorovina obsahuje počátek,
- b) $0 + 6 \cdot 0 + 8 > 0$, také druhá polorovina obsahuje počátek,
- c) $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 6 < 0$, i zde je nerovnost splněna, takže i třetí polorovina obsahuje počátek.

Poloroviny vyznačíme šipkami a tím je zobrazena i množina M .



Z obrázku usoudíme, že hledaný bod U je průsečíkem přímek b , c ; jeho souřadnice dostaneme řešením soustavy

$$x + 6y + 8 = 0,$$

$$3x - 2y - 6 = 0.$$

Druhou rovnici násobíme třemi a sečteme s první $10x + 8 - 18 = 0$, takže $x = 1$; po dosazení např. do 2. rovnice máme $3 - 2y - 6 = 0$, tedy $y = -\frac{3}{2} = -1,5$.

Hledaný bod s nejmenší y -ovou souřadnicí je $U[1; -1,5]$.

Metodické poznámky

Při hledání bodu U a jeho souřadnic je uplatněna spolupráce názoru (obrázku) a výpočtu.

Úloha 4 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění řešení soustavy nerovnic o dvou proměnných, numerické výpočty, největší prvek množiny nezáporných celých čísel

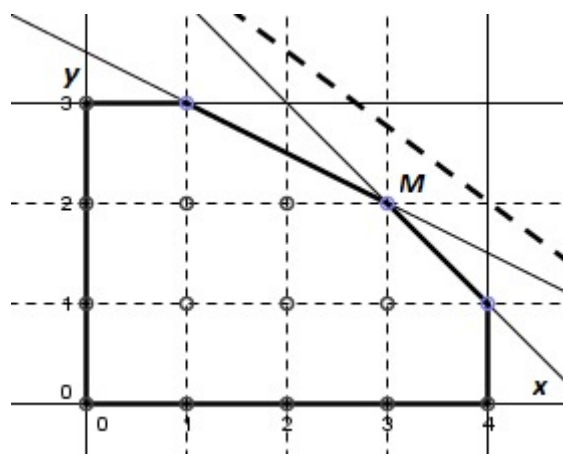
Pro nezáporná celá čísla x, y platí $x + y \leq 5$, $x + 2y \leq 7$, $x \leq 4$, $y \leq 3$.

- Najděte a graficky znázorněte všechna řešení $[x; y]$ této soustavy čtyř nerovnic.
- Zjistěte, pro které řešení $[x; y]$ nabývá výraz $3x + 4y$ své největší hodnoty m a vypočítejte m .

Řešení (s využitím Geogebry)

- Sestrojíme hranice polorovin, tedy přímky a, b, c, d : $x + y = 5$, $x + 2y = 7$, $x = 4$, $y = 3$ a užitím příslušných nerovnic rozhodneme, které poloroviny jsou zadány. U přímek a, b použijeme počátek soustavy souřadnic jako v úloze 2, poloroviny $x \leq 4$, $y \leq 3$ jsou zřejmé. Navíc, jelikož řešení mají být nezáporná čísla, přidáme $x \geq 0$ a $y \geq 0$. Pro názornost získanou oblast orámujeme. Užitím přímek $x = c$, $y = d$, kde $c \in \{1, 2, 3\}$, $d \in \{1, 2\}$ zobrazíme body s celými souřadnicemi. U bodů „u hranice“ oblasti se přesvědčíme, že leží na hranici (tj. na příslušných dvou přímkách) a patří tedy do dané oblasti; jsou to body $[1; 3]$, $[3; 2]$ a $[4; 1]$, zde je toto ověření natolik jednoduché, že se provede z paměti.

Hledaných řešení je 16.



- Uvažujeme nyní výraz $3x + 4y$. Zvolíme-li nějaké konkrétní m , pak tuto hodnotu má výraz $3x + 4y$ na celé přímce $3x + 4y = m$; znázorníme některou z nich, na obrázku je zvoleno $m = 20$ a na této přímce (je vyznačena čárkovaně) žádné z těch šestnácti řešení neleží. Měníme-li hodnotu m , pak dostáváme soustavu navzájem rovnoběžných

přímek (v Geogebře lze tuto přímku dynamicky měnit – rovnoběžně posunovat). Samozřejmě, čím je m větší, tím je přímka dále od počátku a naopak. Přímku pro $m = 20$ přibližujeme k počátku, dokud na ni nějaké řešení nepadne. V našem případě takovým řešením je bod $M[3; 2]$ a platí $m = 3x + 4y = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17$.

Metodické poznámky

Tato úloha souvisí s tzv. lineární optimalizací.

Úloha 5 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: grafické znázornění řešení soustavy nerovnic o dvou proměnných, numerické výpočty, největší prvek množiny nezáporných celých čísel, soustava rovnic s parametrem

V dílně se montují přístroje P_1 , P_2 dvou druhů. Přístrojů P_1 lze za týden zhotovit nejvýše 6, přístroje P_2 nejvýše 4. Všech přístrojů dohromady lze za týden vyrobit nejvýše 7. Zapište a znázorněte všechny možné výrobní programy a rozhodněte, při kterém z nich se dosáhne nejvyššího zisku, a to ve dvou případech:

- Jeden přístroj P_1 přináší zisk 150 000 Kč, přístroj P_2 160 000 Kč.
- Zisk za P_1 se zvýšil na 200 000 Kč, za P_2 na 180 000 Kč.

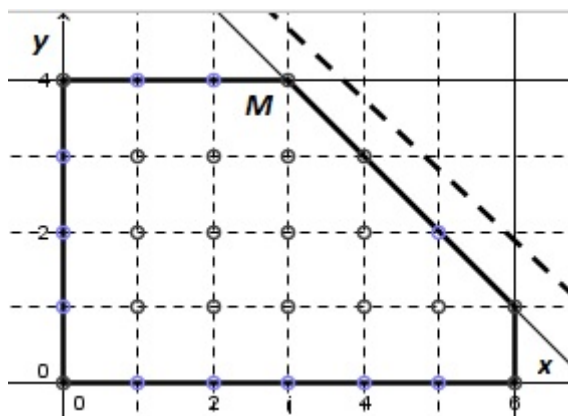
V obou případech vždy zapište rovnici, jak zisk závisí na výrobním programu a vypočítejte, oč se zvětšil týdenní zisk.

Řešení (s využitím Geogebry)

Výrobní program zapišeme jako $[x; y]$, kde x je počet přístrojů P_1 a y počet přístrojů P_2 .

- Celkový zisk za vyrobené přístroje je $z = 150\,000x + 160\,000y$. Nyní si graficky znázorníme všechny možné výrobní programy; platí

$$x \leq 6, \quad y \leq 4, \quad x + y \leq 7 \quad \text{a samozřejmě} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

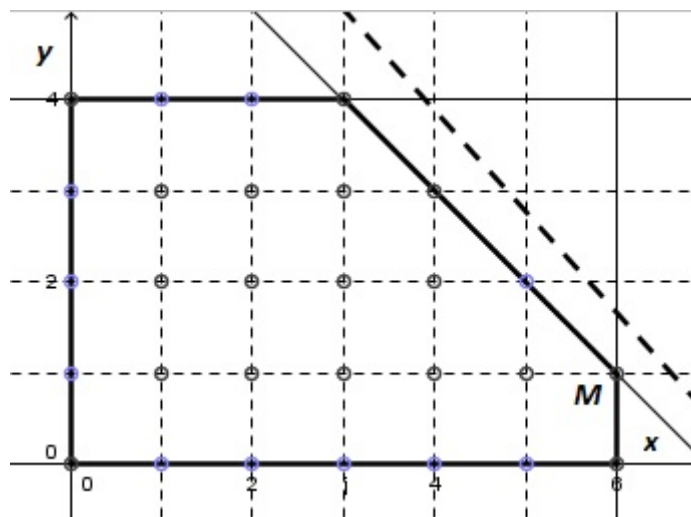


Je celkem 29 možných výrobních programů.

Uvažujme nyní vztah pro zisk: $z = 150\,000x + 160\,000y$. Považujme proměnnou z za parametr, pak obrazem této rovnice je přímka $150\,000x + 160\,000y = z$, která je rovnoběžná s přímkou $1,5x + 1,6y = z$, kde obnosy počítáme s jednotkou 100 000 Kč; na obrázku je zvoleno $z = 12$, viz čárkovaná čára. Na každé rovnoběžce je zisk konstantní a je tím menší, čím je přímka blíže počátku soustavy souřadnic. Nejvzdálenější poloha je zřejmě ta, když přímka prochází bodem $M[3; 4]$; v tomto případě je $z = 3 \cdot 150\,000 + 4 \cdot 160\,000 = 1\,090\,000$.

Optimální výrobní program je: Vyrobit 3 přístroje V_1 a 4 přístroje V_2 ; zisk je pak 1 090 000 Kč.

- b) Celkový zisk za vyrobené přístroje je nyní $z = 200\,000x + 180\,000y$. Podobně jako v předchozím případě sestrojíme přímku odpovídající novému výpočtu zisku, opět počítáme s jednotkou 100 000 Kč, takže půjde o přímku $2x + 1,8y = z$, za z zvolíme 15 (vyznačena čárkovaně).



Rovnoběžka s touto přímkou nejvzdálenější od počátku zřejmě prochází bodem $M[6; 1]$; v tomto případě je $z = 6 \cdot 200\,000 + 1 \cdot 180\,000 = 1\,380\,000$.

Optimální výrobní program je: Vyrobit 6 přístrojů V_1 a 1 přístroj V_2 ; tržba je pak 1 380 000 Kč.

Zisk se zvýšil o $1\,380\,000 - 1\,090\,000 = 290\,000$ Kč.

Metodické poznámky

Je možno připomenout, že kdyby zisk za oba přístroje byl stejný, dal by tento výpočet 4 rovnocenné výrobní programy.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál: dílo autora

Autor: doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.; stanislav.travnicek@volny.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: analytická geometrie, kořeny kvadratické rovnice, kvadratická rovnice s parametrem

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

V oboru reálných čísel řešte rovnici $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Řešení

Kořeny této rovnice najdeme pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice, pomocí Viètových vztahů či rozkladu kvadratického trojčlenu na součin. Tyto kořeny jsou čísla 1 a 6.

Závěr. Daná kvadratická rovnice má dva reálné kořeny, kterými jsou čísla 1 a 6.

Metodické poznámky

Úlohu je možné vyřešit pouhým dosazením do vzorce, což by měl zvládnout každý student střední školy.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice, vztah počtu a kvality kořenů k diskriminantu

Najděte hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby rovnice $x^2 - 7ax + 4 = 0$ měla právě jeden dvojnásobný kořen.

Řešení

Aby měla rovnice jeden dvojnásobný kořen, musí být diskriminant ve vzorci pro kořeny kvadratické rovnice nulový. Hledaný parametr a je tedy řešením následující rovnice. $D = (-7a)^2 - 16 = 0$. Tato řešení jsou dvě $a = \frac{4}{7}$ a $a = -\frac{4}{7}$.

Závěr. Hledané hodnoty parametru a jsou $\frac{4}{7}$ a $-\frac{4}{7}$.

Metodické poznámky

Rovnice s parametrem jsou obecně mezi studenty považovány za obtížnější učivo, důvodem je patrně výskyt dvou neznámých v rovnici. Proto je úloha zařazena mezi těžší. Úloha je dobrým procvičením závislosti počtu kořenů na hodnotě diskriminantu.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice, vztah počtu a kvality kořenů k diskriminantu, rovnice s parametrem

Najděte hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby rovnice $x^2 - (7 + a)x + 8 = 0$ měla právě jeden dvojnásobný kořen.

Řešení

Ze stejných důvodů jako v předchozí úloze řešení získáme z rovnice $D = (7 + a)^2 - 32 = a^2 + 14a + 17 = 0$. Jsou to čísla $-7 + 4\sqrt{2}$ a $-7 - 4\sqrt{2}$.

Závěr. Hodnoty parametru a jsou čísla $-7 + 4\sqrt{2}$ a $-7 - 4\sqrt{2}$.

Metodické poznámky

Úloha 3 je obdobnou úlohou jako úloha 2. Její řešení však vede na složitější kvadratickou rovnici než v úloze 2, proto je označena stupněm 2–3.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice, vztah počtu a kvality kořenů k diskriminantu, rovnice s parametrem

Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby rovnice $x^2 - 7ax + 4 = 0$ měla dva různé reálné kořeny.

Řešení

Kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny, jestliže diskriminant je kladný. Řešení této úlohy tudíž vede na řešení kvadratické nerovnice $D = (-7a)^2 - 16 > 0$. Výraz na levé straně nerovnosti rozložíme dle vzorce pro rozdíl čtverců na součin lineárních výrazů $(7a - 4)$ a $(7a + 4)$, které musí být buď oba kladné nebo oba záporné. Množina vyhovujících hodnot parametru a je tedy $(-\infty; -\frac{4}{7}) \cup (\frac{4}{7}; \infty)$.

Závěr. Přípustné hodnoty parametru a jsou prvky množiny $(-\infty; -\frac{4}{7}) \cup (\frac{4}{7}; \infty)$.

Metodické poznámky

V řešení úlohy 4 je zapotřebí kromě užití úvah z úloh předchozích také umět vyřešit kvadratickou nerovnici, proto je úloha označena jako nejobtížnější.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Pavla Hofmanová; pavla.hofmanova@ujep.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: kvadratická rovnice, diskriminant, kořenový činitel

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: úpravy algebraických výrazů, rozklad na součin kořenových činitelů

Najděte reálné číslo p takové, aby pro reálné kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice

$$x^2 + px + 81 = 0$$

platilo, že jeden z kořenů je třetí mocninou druhého. Určete oba kořeny.

Řešení

Z Viètových vztahů pro normovanou kvadratickou rovnici plyne:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad (1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = 81. \quad (2)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x_1 = x_2^3$. Po dosazení za x_1 do druhé rovnice dostáváme $81 = x_2^4$, z čehož $x_2 = 3$, $x_1 = 27$. Dosazením do získáme $p = -30$.

Metodické poznámky

Každou kvadratickou rovnici lze zapsat v normovaném tvaru $x^2 + px + q = 0$. Jsou-li její kořeny čísla x_1, x_2 , pak taky ve tvaru $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Po roznásobení závorek a porovnání koeficientů dostaneme vztahy: $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1 \cdot x_2 = q$, což jsou tzv. Viètovy vztahy.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: Viètovy vztahy, řešení kvadratické rovnice a soustavy rovnic

Jestliže rovnice $x^2 + px + q = 0$ má dva různé reálné kořeny x_1, x_2 , pak rovnice $x^2 - px + pq = 0$ má kořeny $x_1 + 1, x_2 + 1$. Určete čísla p, q .

Řešení

Označme rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \quad (3)$$

$$x^2 - px + pq = 0. \quad (4)$$

Z Viètových vztahů vyplývá pro rovnici (3):

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

a pro rovnici (4)

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = p,$$

$$(x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) = pq.$$

Upravíme-li poslední dvě rovnice, dostaneme

$$x_1 + x_2 + 2 = p, \quad (5)$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 + 1 = pq. \quad (6)$$

Dosadíme-li do rovnic (5) a (6) za $x_1 + x_2$ číslo $-p$ a do rovnice (6) za $x_1 \cdot x_2$ číslo q , dostaneme:

$$-p + 2 = -p \quad \Rightarrow \quad p = 1,$$

$$-p + q + 1 = pq \quad \Rightarrow \quad p = q, \quad q \text{ je libovolné reálné číslo.}$$

Zadání vyžaduje, aby byly kořeny různé. To je splněno, pokud jsou diskriminanty kladná reálná čísla. Diskriminant rovnice (3) je $D_1 = p^2 - 4q > 0$, rovnice (4) $D_2 = p^2 - 4pq > 0$. Pro $p = 1$ je $D_1 = D_2 = 1 - 4q > 0$, takže $q < \frac{1}{4}$.

Závěr. Řešením je proto každá uspořádaná dvojice $[p, q] = [1; q]$, kde $q < \frac{1}{4}$.

Metodické poznámky

Viètovy vztahy jsou určeny i pro řešení rovnic vyšších stupňů. Je vhodné se o tom žákům zmínit, popř. ukázat vztahy pro kubickou rovnici.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kvadratická rovnice, řešení úplné kvadratické rovnice pomocí diskriminantu

V oboru reálných čísel řešte rovnici $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

Řešení

Protože $x = 0$ není kořenem rovnice, můžeme rovnici dělit x^2 , dostaneme

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0,$$

po vytknutí

$$6 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 5 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) - 38 = 0. \quad (7)$$

Zavedme substituci

$$y = x + \frac{1}{x}. \quad (8)$$

Umocněním a úpravou dostaneme

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Dosazením posledních dvou vztahu do (7) vyjde kvadratická rovnice $6y^2 - 5y - 50 = 0$. Jejími kořeny jsou čísla $y_1 = \frac{10}{3}$, $y_2 = -\frac{10}{4}$. Dosadíme-li je do (8), vyjdou čtyři kořeny:

$$x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{3}.$$

Metodické poznámky

Zadaná rovnice se nazývá reciproká, protože její kořeny jsou po dvojicích převrácená čísla. Řeší se pomocí Lagrangeovy substituce.

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, E., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava, SPN, 1997.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Václav Vaněk; vvanek1@seznam.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice a nerovnice, Viètovy vztahy, soustavy kvadratických rovnic s parametrem

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: Viètovy vztahy, řešení kvadratických rovnic

Určete hodnotu reálného parametru p tak, aby obě rovnice

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= 0, \\x^2 - 16x + p &= 0\end{aligned}$$

měly společný kořen.

Řešení

Kořeny první rovnice jsou 1 a 3. Je-li společným kořenem $x_1 = 1$, pak z Viètových vztahů

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

ve druhé rovnici dostaneme $x_2 = 16 - 1 = 15$. Pro odpovídající p platí $p = 1 \cdot 15 = 15$.

Je-li společným kořenem číslo $x_1 = 3$, pak pro druhý kořen x_2 druhé rovnice platí $x_2 = 16 - 3 = 13$ a příslušné $p = 3 \cdot 13 = 39$.

Závěr. Obě rovnice mají společný kořen pro hodnoty parametru $p = 15$ nebo $p = 39$, a to 1 a 3.

Metodické poznámky

Řešení kvadratické rovnice patří k základním poznatkům, dosazení jednoho z kořenů do Viètových vztahů a dopočítání druhého kořene je pro žáky snadným úkolem. Dosadíme-li za $x = 1$, resp. $x = 3$ do druhé rovnice, můžeme získat příslušnou hodnotu parametru p i bez dopočítávání druhého kořene rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratických rovnic, Viètovy vztahy

Určete hodnotu reálného parametru p tak, aby obě rovnice

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + p &= 0, \\x^2 - 16x + 5p &= 0\end{aligned}$$

měly společný kořen.

Řešení

Označme společný kořen obou rovnice x_1 . První rovnice má tedy kořeny x_1 a x_2 , druhá pak x_1 a x_3 . Z Viètových vztahů dostáváme pro dané rovnice

$$x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 + x_3 = 16,$$

odkud snadno (rozdílem obou vztahů) určíme

$$x_3 - x_2 = 12.$$

Ze zbylých Viètových vztahů dostáváme pro dané rovnice

$$x_1 x_2 = p, \quad x_1 x_3 = 5p,$$

odkud snadno (rozdílem obou vztahů) určíme

$$x_1(x_3 - x_2) = 4p.$$

Po dosazení $x_3 - x_2 = 12$ je tedy $12x_1 = 4p$, tj.

$$x_1 = \frac{p}{3}, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 15.$$

Platí tudíž

$$\frac{p}{3} + 3 = 4,$$

odkud $p = 3$.

Závěr. Obě rovnice mají společný kořen $x_1 = 1$ pro hodnotu parametru $p = 3$.

Metodické poznámky

Pro řešení využijeme Viètových vztahů, jejich srovnáním dostáváme snadné rovnice, které nejsou pro žáky náročným úkolem.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení soustav lineárních rovnic s parametrem, Viètovy vztahy

Určete hodnotu reálného parametru p tak, aby obě rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + px + 1 &= 0, \\ x^2 + x + p &= 0 \end{aligned}$$

měly společný kořen.

Řešení

Označme společný kořen obou rovnice x_1 . První rovnice má tedy kořeny x_1 a x_2 , druhá pak x_1 a x_3 . Z Viètových vztahů dostáváme pro dané rovnice

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_1 x_3 = p,$$

odkud snadno (podílem obou vztahů, protože $x_1 \neq 0$) určíme

$$x_3 = px_2.$$

Ze zbylých Viètových vztahů dostáváme (po dosazení za x_3) rovnice

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 + px_2 = -1.$$

Rozdíllem obou vztahů získáme

$$x_1(p - 1) = p - 1.$$

Pro hodnotu $p = 1$ dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 + x + 1 = 0$, která nemá v oboru reálných čísel řešení. Pro $p \neq 1$ je potom

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 1.$$

Platí proto

$$p = -(1 + 1) = -2.$$

První rovnice má potom jediný dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 1$, druhá rovnice má kořeny $x_1 = 1$ a $x_3 = -2$.

Závěr. Obě rovnice mají společný kořen $x_1 = 1$ pro hodnotu parametru $p = -2$.

Metodické poznámky

Pro řešení využijeme Viètových vztahů, jejich srovnáním dostáváme vhodné rovnice s parametrem, které jsou žáci schopni vyřešit.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: kvadratické rovnice, Viètovy vzorce

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice, Viètovy vzorce

V rovnici $x^2 + px - 15 = 0$, kde $p \in \mathbb{R}$, určete p tak, aby jedním kořenem bylo číslo $x_1 = -5$. Ověřte správnost výpočtu.

Řešení

Úlohu řešíme užitím vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice tzv. *Viètových vzorců*:

Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$, kde $p, q \in \mathbb{R}$, platí

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Z Viètových vzorců a ze zadání plyne

$$-5 + x_2 = -p,$$

$$-5 \cdot x_2 = -15.$$

Z druhé rovnice vyjádříme $x_2 = 3$ a dosadíme do první, čímž obdržíme $p = 2$.

Ověření správnosti výsledku provedeme dosazením lineárního členu $p = 2$ do zadání, čímž získáme rovnici

$$x^2 + 2x - 15 = 0,$$

která má kořeny

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 3,$$

čímž je podmínka $x_1 = -5$ splněna.

Závěr. Dané podmínce vyhovuje $p = 2$.

Metodické poznámky

Číslo p můžeme určit také jiným způsobem, např. dosazením kořene $x_1 = -5$ do původní rovnice. Dostaneme $25 - 5p - 15 = 0$, odkud $p = 2$.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice, Viètovy vzorce

Určete všechny hodnoty absolutního členu $c \in \mathbb{R}$ tak, aby jeden kořen kvadratické rovnice $x^2 - 17x + c = 0$ byl o 1 větší než druhý. Ověřte správnost výpočtu.

Řešení

Z rovnice, která je již zadaná v normovaném tvaru plyne, že $p = 17$, $q = c$, a z podmínky úlohy pro její kořeny platí $x_2 = x_1 + 1$. Užitím Viètových vzorců obdržíme

$$x_1 \cdot (x_1 + 1) = c, \quad (1)$$

$$x_1 + x_1 + 1 = 17. \quad (2)$$

Z rovnice (2) vypočítáme kořen $x_1 = 8$ a dosadíme ho do rovnice (1), čímž dostáváme

$$\begin{aligned} 8 \cdot (8 + 1) &= c, \\ c &= 72. \end{aligned}$$

Ověření správnosti výsledku provedeme dosazením absolutního členu $c = 72$ do zadání, čímž získáme rovnici

$$x^2 - 17x + 72 = 0,$$

která má kořeny

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 9,$$

čímž je podmínka $x_2 = x_1 + 1$ splněna.

Závěr. Dané podmínce vyhovuje $c = 72$.

Metodické poznámky

Řešení úlohy je vhodné doplnit jednoduchým odvozením vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice v normovaném tvaru.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice, Viètovy vzorce

Pro která reálná čísla m bude mít rovnice $6x^2 - 9mx - 2m + 8 = 0$ jeden kořen dvakrát větší než druhý? Ověřte správnost výpočtu.

Řešení

Pro kořeny rovnice $6x^2 - 9mx - 2m + 8 = 0$ podle Viètových vzorců platí

$$x_1 + x_2 = \frac{9m}{6} \quad \text{tj.} \quad x_1 + x_2 = \frac{3m}{2} \quad (3)$$

a zároveň

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{8 - 2m}{6} \quad \text{tj.} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4 - m}{3}. \quad (4)$$

Ze zadání plyne

$$x_1 = 2x_2. \quad (5)$$

Po dosazení (5) do (3) dostaneme $2x_2 + x_2 = \frac{3m}{2}$, odtud

$$x_2 = \frac{m}{2}. \quad (6)$$

Po dosazení (5) do (4) obdržíme

$$2x_2^2 = \frac{4-m}{3}$$

a využitím vztahu (6) dostaneme

$$2 \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{4-m}{3},$$

odkud po úpravě získáme kvadratickou rovnici

$$3m^2 + 2m - 8 = 0,$$

pro jejíž kořeny platí

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm 10}{6},$$

odkud $m_1 = -2, m_2 = \frac{4}{3}$.

Dosazením kořene $m_1 = -2$ do zadání dostaneme rovnici $x^2 + 3x + 2 = 0$, která má kořeny $x_1 = -2, x_2 = -1$. Platí $x_1 = 2x_2$.

Dosazením kořene $m_2 = \frac{4}{3}$ do zadání dostaneme rovnici $9x^2 - 18x + 8 = 0$, která má kořeny $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$. Opět platí $x_1 = 2x_2$.

Závěr. Dané podmínce vyhovuje $m_1 = -2, m_2 = \frac{4}{3}$.

Metodické poznámky

Při řešení využíváme Viètovy vzorce pro kvadratickou rovnici, která není v normovaném tvaru. Následující větu je vhodné odvodit.

Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, platí: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Sedláček Lubomír, Ph.D.; lsedlacekf@fai.utb.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice a nerovnice – kvadratická rovnice (diskriminant, vztahy mezi kořeny a koeficienty, tzv. Viètovy vzorce), úpravy lomených výrazů

Úloha 1 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: kvadratická rovnice, řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu, vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice; úpravy lomených výrazů

Nechť x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$ a $c \neq 0$. Pomocí koeficientů a , b , c vyjádřete hodnotu výrazu $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Řešení

Podle Viètových vzorců je

$$\left(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\right) \wedge \left(x_1 x_2 = \frac{c}{a}\right).$$

Vzhledem k tomu, že daná rovnice nemá kořen roven 0, pro výraz $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, tj. pro součet převrácených hodnot kořenů, platí

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2}.$$

Po dosazení a úpravách je

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}.$$

Závěr. Pro kořeny x_1 , x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$ platí $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$.

Metodické poznámky

Pro vyřešení úlohy není nutná znalost Viètových vzorců. Je možné vyjít z kořenů vyjádřených pomocí diskriminantu, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$, nicméně úpravy vedoucí k vyjádření výsledku jsou složitější

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{1}{\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}} + \frac{1}{\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}} = \frac{2a}{-b+\sqrt{D}} + \frac{2a}{-b-\sqrt{D}} = \\ &= \frac{2a(-b-\sqrt{D}) + 2a(-b+\sqrt{D})}{b^2 - D} = \frac{-4ab}{b^2 - (b^2 - 4ac)} = -\frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: kvadratická rovnice, řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu, vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice, vzorec $(a+b)^2$, úpravy lomených výrazů

Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, vyjádřete pomocí koeficientů a, b, c výraz $x_1^2 + x_2^2$.

Řešení

Podle Viètových vzorců je

$$\left(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\right) \wedge \left(x_1 x_2 = \frac{c}{a}\right).$$

Pro výraz $x_1^2 + x_2^2$, tj. pro součet druhých mocnin kořenů, platí

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) - 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2.$$

Po dosazení a úpravách je

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Závěr. Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$ platí $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$.

Metodické poznámky

Při řešení úlohy využitím Viètových vzorců je třeba umět doplnit součet $x_1^2 + x_2^2$ na druhou mocninu dvojčlenu $x_1 + x_2$, neboli výraz $x_1^2 + x_2^2$ „doplnit na čtverec“. Pokud budeme úlohu řešit bez použití Viètových vzorců a vyjdeme z kořenů vyjádřených pomocí diskriminantu, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$, tuto úpravu potřebovat nebudeme

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)^2 = \frac{(-b + \sqrt{D})^2}{4a^2} + \frac{(-b - \sqrt{D})^2}{4a^2} = \\ &= \frac{2b^2 + 2D}{4a^2} = \frac{2b^2 + 2(b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4b^2 - 8ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}. \end{aligned}$$

Úloha 3 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: kvadratická rovnice, řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu, vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice, vzorec $(a+b)^3$, úpravy lomených výrazů

Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, vyjádřete pomocí koeficientů a, b, c výraz $x_1^3 + x_2^3$.

Řešení

Podle Viètových vzorců platí

$$\left(x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\right) \wedge \left(x_1 x_2 = \frac{c}{a}\right).$$

Pro výraz $x_1^3 + x_2^3$, tj. pro součet třetích mocnin kořenů, máme

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3) - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2).$$

Po dosazení a úpravách je

$$x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3 \cdot \frac{c}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}.$$

Závěr. Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$ platí

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{-b^3 + 3abc}{a^2}.$$

Metodické poznámky

Při řešení úlohy využitím Viètových vzorců je třeba umět doplnit součet $x_1^3 + x_2^3$ na třetí mocninu dvojčlenu $x_1 + x_2$. Pokud budeme úlohu řešit bez použití Viètových vzorců a vyjdeme z kořenů vyjádřených pomocí diskriminantu, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$, tuto úpravu potřebovat nebudeme

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)^3 + \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right)^3 = \frac{(-b + \sqrt{D})^3}{8a^3} + \frac{(-b - \sqrt{D})^3}{8a^3} = \\ &= \frac{-2b^3 - 6bD}{8a^3} = \frac{-2b^3 - 6b(b^2 - 4ac)}{8a^3} = \frac{-8b^3 + 24abc}{8a^3} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}. \end{aligned}$$

Zdroj:

JANEČEK, F.: *Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy – sbírka úloh z matematiky pro střední školy*. Praha, Prometheus 2004

Obrazový materiál:

Autor: RNDr. Eva Pomykalová; eva.pomykalova@email.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: lineární, kvadratické a iracionální rovnice

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: definiční obor výrazu, řešení kvadratické rovnice

Řešte v oboru reálných čísel rovnici $\sqrt{2x-7} = 3-x$.

Řešení

Definiční obor rovnice je interval $\langle \frac{7}{2}; \infty \rangle$, ale pro tato x nabývá pravá strana rovnice záporných hodnot, proto řešení v oboru reálných čísel neexistuje.

Metodické poznámky

Úlohu lze řešit i důsledkovými úpravami, aby žáci viděli souvislosti a sami rozhodli, které řešení je lepší.

Úloha 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratické rovnice, diskriminant

Řešte v oboru reálných čísel rovnici $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-9} = 1$.

Řešení

Po umocnění odbržíme rovnici

$$-2\sqrt{x-1} = x-9,$$

následné umocnění převede problém na řešení kvadratické rovnice

$$x^2 - 22x + 85 = 0,$$

jejíž kořeny jsou 17 a 5. Vzhledem k důsledkovým úpravám, je třeba provést zkoušku. Vyhovuje pouze kořen 5.

Metodické poznámky

Díky úpravě rovnice na tvar s jedinou odmocninou na každé straně je řešení rychlejší s menší pravděpodobností chyby.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení rovnic pomocí substituce, rovnice v součinném tvaru

Řešte v oboru reálných čísel rovnici $\sqrt[3]{x+1} + 5 = x$.

Řešení

Zvolme substituci $y = \sqrt[3]{x+1}$, potom $x+1 = y^3$. Po dosazení přejde původní rovnice na tvar

$$\begin{aligned}y^3 - y - 6 &= 0, \\(y-2)(y^2 + 2y + 3) &= 0,\end{aligned}$$

která má jeden reálný kořen $y = 2$. Řešením původní rovnice je $x = 7$.

Metodické poznámky

Je vhodné zmínit Cardanovy vzorce, i když pro řešení nejsou nezbytně nutné.

Další úlohy

1. Řešte rovnice v oboru reálných čísel rovnice

a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+5} = 3 + \sqrt{3x-5}$.

$$[P = \{2; 101\}]$$

b) $\sqrt[4]{x-4} + 6 = \sqrt{x-4}$.

$$[P = \{85\}]$$

2. Řešte v oboru reálných čísel rovnici $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-9} = 1$.

$$[5]$$

3. Najděte všechna přirozená čísla dělitelná 4, jejichž součet číslic je 7 a součin číslic 6.

$$[16, 1132, 1312, 3112]$$

4. Obvod pravoúhlého trojúhelníka je 48 cm, přepona je o 4 cm delší než jedna odvěsna. Vypočtěte obsah trojúhelníka.

$$[P = 96 \text{ cm}^2]$$

Zdroj:

Archiv autora,

Burjan, V., Hrdina, L., Maxian, M. *Prehľad matematiky*, Bratislava: SPN, 1997.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Vladimír Vaněk, Ph.D.; vladimir.vanek@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice a nerovnice, iracionální rovnice a nerovnice, druhá odmocnina

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratické rovnice, umocnění dvojčlenu

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x = \sqrt{5x + 11} - 1.$$

Řešení

Upravíme rovnici tak, aby na její pravé straně zůstala druhá odmocnina osamocena

$$x + 1 = \sqrt{5x + 11}.$$

Obě strany rovnice umocníme, což znamená, že zkouška bude nutnou součástí řešení

$$x^2 + 2x + 1 = 5x + 11.$$

Po úpravě získáme kvadratickou rovnici $x^2 - 3x - 10 = 0$, jejímiž kořeny jsou $x_1 = -2$ a $x_2 = 5$.

Provedeme zkoušku dosazením do dané rovnice

- $L(-2) = -2$, pravá strana rovnice je $P(-2) = \sqrt{-10 + 11} - 1 = 0$, a tedy $L \neq P$. ($P(-2)$ nebylo ani třeba počítat, protože $P(-2) \geq -1$.)
- $L(5) = 5$, $P(5) = \sqrt{25 + 11} - 1 = 5$. Je tedy $L(5) = P(5)$ a proto 5 je řešením dané rovnice.

Závěr. Rovnice $x = \sqrt{5x + 11} - 1$ má v oboru reálných čísel množinu řešení $K = \{5\}$.

Metodické poznámky

V úloze jsme záměrně nestanovili podmínku řešitelnosti, tj. $x \geq -\frac{11}{5}$. Vzhledem k nutnosti umocnit obě strany rovnice je zkouška nutnou součástí řešení. Vyskytuje-li se v rovnici více výrazů s odmocninou, pak mohou podmínky řešitelnosti rozhodnout o řešení rovnice a je rozumné je určit, není-li to obtížnější než samotné řešení rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratické rovnice, umocnění dvojčlenu

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 1.$$

Řešení

V rovnici se vyskytuje více než jedna odmocnina, proto stojí za to se přesvědčit, zda se jejich definiční obory navzájem nevylučují – potom by rovnice neměla řešení. Musí být $2x + 3 \geq 0$ a zároveň $x + 1 \geq 0$, tj. $x \geq -1,5$ a zároveň $x \geq -1$. Rovnice má smysl pro $x \geq -1$.

Převedením jedné odmocniny na pravou stranu dostaneme po umocnění

$$2x + 3 = 1 + (x + 1) - 2\sqrt{x + 1}$$

tj.

$$x + 1 = -2\sqrt{x + 1}$$

Po dalším umocnění dostaneme

$$x^2 + 2x + 1 = 4(x + 1)$$

tj. kvadratickou rovnici $x^2 - 2x - 3 = 0$, jejímiž reálnými kořeny jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Vzhledem k neekvivalentnosti provedených úprav je třeba provést zkoušku. Platí

- $L(-1) = \sqrt{1} + \sqrt{0} = 1$, $P(-1) = 1$, a tedy $L(-1) = P(-1)$
- $L(3) = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$, $P(3) = 1$, a tedy $L(3) \neq P(3)$

Jediným řešením dané rovnice je -1 .

Závěr. Rovnice $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 1$ má v oboru reálných čísel množinu řešení $K = \{-1\}$.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratické rovnice, umocnění dvojčlenu

V oboru reálných čísel řešte nerovnici

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} > 1.$$

Řešení

Nerovnici lze řešit pomocí nulových bodů příslušné rovnice se zřetelem k definičním oborům v nerovnici se vyskytujícími odmocninami. I o těchto definičních oborech (podmínkách řešitelnosti) lze rozhodnout pomocí nulových bodů výrazů pod odmocninami.

Nulové body výrazů pod odmocninami:

- $2x + 3 = 0$, tedy $x_1 = -\frac{3}{2}$.
- $x + 1 = 0$, tedy $x_1 = -1$.

Nulový bod rovnice příslušné dané nerovnici:

- $x_r = -1$, když jsme využili výsledku úlohy 2.

Tyto tři body rozdělí interval reálných čísel na tři intervaly $(-\infty; -\frac{3}{2})$, $(-\frac{3}{2}; -1)$ a $(-1; +\infty)$, které mohou být řešením dané nerovnice. Číslo -1 nemůže být součástí řešení, neboť daná nerovnice obsahuje ostrou nerovnost.

O tom, který interval je řešením nerovnice rozhodneme zkouškou, kdy do levé, resp. pravé strany dané nerovnice dosadíme libovolný bod z tohoto intervalu.

- Pro interval $(-\infty; -\frac{3}{2})$. Zvolme např. $x = -100$. Potom $l(-100) = \sqrt{-200+3} + \sqrt{-100+1}$ a tento výraz nemá smysl (obě odmocniny v oboru reálných čísel neexistují).
- Pro interval $(-\frac{3}{2}; -1)$. Zvolme např. $x = -1,1$. Potom $l(-1,1) = \sqrt{0,8} + \sqrt{-0,1}$ a tento výraz nemá smysl (druhá odmocnina v oboru reálných čísel neexistuje).
- Pro interval $(-1, +\infty)$. Zvolme např. $x = 0$. Potom $l(0) = \sqrt{3} + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{3}$ a $p(0) = 1$. Platí tedy $l(0) > p(0)$ a příslušný interval je řešením dané nerovnice.

Závěr. Řešením nerovnice $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} > 1$ v oboru reálných čísel je interval $(-1, +\infty)$.

Metodické poznámky

V úloze jsme záměrně spojili určení oboru smyslu nerovnice pomocí nulových bodů výrazů vyskytujících se pod sudými odmocninami s hledáním řešení nerovnice pomocí nulového bodu příslušné rovnice – jde o univerzální postup. V tomto případě, kdy pod sudými odmocninami se vyskytují lineární dvojčleny, je však snadnější určit obor smyslu nerovnice z podmínky existence sudé odmocniny. Z řešení úlohy 2 víme, že daná nerovnice má smysl pouze pro $x \in (-1, +\infty)$. Nulový bod $x = -1$ nemůže být součástí řešení, v úvahu připadá pouze možnost $x \in (-1, +\infty)$, kterou potvrdíme zkouškou.

Zdroj: Dílo autora

Obrazový materiál: Dílo autora

Autor: RNDr. Miloslav Závodný; mzavodny@gmail.com, miloslav.zavodny@upol.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: rovnice a nerovnice, řešení exponenciálních rovnic

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: řešení exponenciálních rovnic, užití substituce

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{5}{6}.$$

Řešení

Užitím substituce

$$t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

převědeme danou rovnici na tvar

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}, \quad \text{a dále} \quad 6t^2 - 5t - 1 = 0,$$

její kořeny jsou

$$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = -\frac{2}{3}.$$

První hodnotě odpovídá $x = 1$, druhé hodnotě nepřísluší žádné reálné číslo x .

Závěr. Daná rovnice má v oboru reálných čísel právě jedno řešení, a to $x = 1$.

Metodické poznámky

Řešení rovnice je založeno na užití substituce, s tímto postupem se žáci v hodinách běžně seznamují.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení základních exponenciálních rovnic, užití průběhu funkce

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{5}{6}\right)^x.$$

Řešení

Porovnáním základů daných tří exponenciálních výrazů v dané rovnici zjistíme

$$\frac{3}{2} > \frac{5}{6} > \frac{2}{3}.$$

Vydělíme-li celou rovnici výrazem na pravé straně, dostaneme

$$\left(\frac{18}{10}\right)^x - \left(\frac{12}{15}\right)^x = 1,$$

odkud po úpravě

$$\left(\frac{9}{5}\right)^x = 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^x.$$

Funkce na levé straně rovnice je rostoucí na množině všech reálných čísel, funkce na pravé straně rovnice je klesající na množině všech reálných čísel. Daná rovnice má proto nejvýše jedno reálné řešení, které snadno uhadneme. Tímto řešením je $x = 1$.

Závěr. Daná rovnice má v oboru reálných čísel právě jedno řešení, a to $x = 1$.

Metodické poznámky

Řešení rovnice je založeno na vhodné úpravě rovnice a na poznacích o průběhu funkce.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: vlastnosti exponenciálních funkcí

V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{5}{6^x}.$$

Řešení

Vynásobíme-li celou rovnici výrazem 6^x , dostaneme

$$9^x - 4^x = 5.$$

Pro $x > 1$ je levá strana

$$9^x - 4^x = 9 \cdot 9^{x-1} - 4 \cdot 4^{x-1} = 5 \cdot 9^{x-1} + 4 \cdot (9^{x-1} - 4^{x-1}) > 5 \cdot 9^{x-1} > 5,$$

pro $x < 1$ je levá strana

$$9^x - 4^x = 9 \cdot 9^{x-1} - 4 \cdot 4^{x-1} = 5 \cdot 4^{x-1} + 9 \cdot (9^{x-1} - 4^{x-1}) < 5 \cdot 4^{x-1} < 5,$$

Jediným řešením proto může být $x = 1$, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením.

Závěr. Daná rovnice má v oboru reálných čísel právě jedno řešení, a to $x = 1$.

Metodické poznámky

Řešení rovnice je založeno na vlastnostech exponenciálních funkcí a vhodných úpravách algebraických výrazů.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: exponenciální rovnice, soustavy exponenciálních rovnic

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, počítání s mocninami

Určete všechna n , která vyhovují rovnici $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$.

Řešení

Řešíme exponenciální rovnici, postupnými úpravami (použijeme pravidla pro počítání s mocninami) dostáváme

$$\begin{aligned}3 \cdot 9^n &= 3^{2011}, \\3 \cdot 3^{2n} &= 3^{2011}, \\3^{2n+1} &= 3^{2011}.\end{aligned}$$

Základy mocnin jsou na obou stranách rovnice stejné, musí se tedy rovnat i exponenty

$$2n + 1 = 2011 \quad \Rightarrow \quad n = 1005.$$

Závěr. Rovnici vyhovuje jediné číslo $n = 1005$.

Metodické poznámky

Při řešení dané exponenciální rovnice využíváme pravidla pro počítání s mocninami.

Úloha 2 (úroveň ??????)

Předpokládané znalosti: řešení soustavy rovnic dosazovací metodou, pravidla pro počítání s mocninami, exponenciální rovnice, soustavy rovnic, logaritmování, počítání s logaritmy

Pro reálná čísla x a y platí $2^x = 15$ a $15^y = 32$. Určete hodnotu součinu xy .

Řešení (1, úroveň 1–2)

Pro řešení úlohy použijeme dosazovací metodu. Z první rovnice víme, že $2^x = 15$, dosadíme do druhé rovnice

$$(2^x)^y = 32$$

a úpravou dostaneme

$$2^{xy} = 2^5, \quad \text{tedy} \quad xy = 5.$$

Řešení (2, úroveň 2–3)

Abychom z obou rovnic mohli vyjádřit neznámé, logaritmujeme je. Postupně dostaneme

$$\begin{aligned}x \log 2 = \log 15 &\Rightarrow x = \frac{\log 15}{\log 2}, \\y \log 15 = \log 32 &\Rightarrow y = \frac{\log 32}{\log 15}.\end{aligned}$$

Vypočítáme součin xy

$$xy = \frac{\log 15}{\log 2} \cdot \frac{\log 32}{\log 15} = \frac{\log 32}{\log 2} = \frac{\log_2 32}{\log_2 2} = 5.$$

Metodické poznámky

V prvním řešení využíváme dosazovací metodu řešení soustav rovnic, ve druhém řešení využíváme logaritmování. S žáky můžeme porovnat oba způsoby řešení.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: exponenciální rovnice, počítání s mocninami, řešení soustavy rovnic součinnou metodou

Nechť pro reálná čísla x, y, z současně platí $x^2yz^3 = 7^3$ a $xy^2 = 7^9$. Určete hodnotu výrazu xyz .

Řešení

Vynásobíme-li levé a pravé strany rovnic, dostaneme

$$\begin{aligned}x^3y^3z^3 &= 7^{12}, \\(xyz)^3 &= (7^4)^3, \quad \text{tedy} \quad xyz = 7^4.\end{aligned}$$

Metodické poznámky

Vzhledem k tomu, že se ptáme na hodnotu součinu xyz , při řešení využíváme součinnou metodu řešení soustavy rovnic.

Zdroj: archiv autora, zadání soutěže Matematický klokan 2008, 2011

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Ivana Macháčiková; machacikova@gymz1.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: logaritmus při daném základu, řešení logaritmických rovnic

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: základy řešení logaritmických rovnic, užití substituce

Řešte rovnici

$$\log \log x = -1.$$

Řešení

Užitím substituce $t = \log x$ převedeme danou rovnici na tvar

$$\log t = -1,$$

jejíž řešením je

$$t = 10^{-1} = \frac{1}{10}.$$

Po dosazení tak máme rovnici

$$\log x = \frac{1}{10},$$

odkud dostáváme $x = \sqrt[10]{10}$.

Závěr. Daná rovnice má právě jedno řešení, a to $x = \sqrt[10]{10}$.

Metodické poznámky

Řešení rovnice je založeno na užití substituce, s tímto postupem se žáci v hodinách běžně seznamují.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení základních logaritmických rovnic, vlastnosti logaritmů

Řešte rovnici

$$\log_2 x^2 + \log_4 x^3 + \log_8 x^4 = 29.$$

Řešení

Protože základy logaritmů nejsou stejné, upravíme všechny výrazy na logaritmy o stejném základu (libovolném, nejvhodnější je v tomto případě logaritmus o základu 2). Dostaneme tak

$$\begin{aligned}\log_2 x^2 + \frac{\log_2 x^3}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x^4}{\log_2 8} &= 29, \\ 2 \log_2 x + \frac{3 \log_2 x}{2} + \frac{4 \log_2 x}{3} &= 29, \\ \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) \log_2 x &= 29,\end{aligned}$$

odkud po úpravě

$$\log_2 x = 6, \quad \text{tj.} \quad x = 2^6 = 64.$$

Závěr. Daná rovnice má právě jedno řešení, a to $x = 64$.

Metodické poznámky

Řešení rovnice je založeno na vhodné úpravě logaritmů a na základních vlastnostech logaritmů.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: řešení základních logaritmických rovnic, vlastnosti logaritmických a lomených funkcí

Řešte rovnici

$$\log_2 x + \log_2 \log_2 x = 1.$$

Řešení

Na levé straně máme součet dvou logaritmů, proto můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\log_2 (x \cdot \log_2 x) = 1,$$

odkud

$$x \cdot \log_2 x = 2.$$

Protože logaritmus je definován pouze pro kladná x , můžeme celou rovnici vydělit výrazem $x > 0$ a dostaneme

$$\log_2 x = \frac{2}{x}.$$

Na levé straně je rostoucí logaritmická funkce, na pravé je lineární lomená funkce, která je klesající. Daná rovnice má proto na svém definičním oboru nejvýše jedno reálné řešení. Tímto řešením je evidentně $x = 2$, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením.

Závěr. Daná rovnice má právě jedno řešení, a to $x = 2$.

Metodické poznámky

Řešení rovnice je založeno na vlastnostech logaritmické a lineární lomené funkce a vhodných úpravách logaritmických výrazů.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: goniometrické vzorce

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: goniometrické vzorce

Vypočtěte $\cotg 2x$, jestliže $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ a platí $\tg x = -\frac{1}{3}$.

Řešení

$$\begin{aligned}\cotg 2x &= \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tg x} - \tg x \right) = \frac{1}{2} \left(-3 - \left(-\frac{1}{3}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 3 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-9}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{8}{3} \right) = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Závěr.

$$\cotg 2x = -\frac{4}{3}.$$

Metodické poznámky

Příklad slouží k procvičení vztahů mezi goniometrickými funkcemi a vzorců

$$\begin{aligned}\cotg \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tg \alpha}; \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: goniometrické vzorce

Zjednodušte pro všechny přípustné reálné hodnoty x

$$\frac{\sin x + \sin 4x}{\sin 2x + \sin 3x} \cdot \left(\cos^4 \frac{x}{4} - \sin^4 \frac{x}{4} \right).$$

Řešení

Pro všechny přípustné reálné hodnoty x následujících výrazů platí

$$\begin{aligned} & \frac{\sin x + \sin 4x}{\sin 2x + \sin 3x} \cdot \left(\cos^4 \frac{x}{4} - \sin^4 \frac{x}{4} \right) = \\ &= \frac{2 \cdot \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos^2 \frac{x}{4} + \sin^2 \frac{x}{4} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4} \right) = \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos 2 \frac{x}{4} = \\ &= \frac{\cos \frac{3x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{3x}{2}. \end{aligned}$$

Závěr.

$$\frac{\sin x + \sin 4x}{\sin 2x + \sin 3x} \cdot \left(\cos^4 \frac{x}{4} - \sin^4 \frac{x}{4} \right) = \cos \frac{3x}{2}.$$

Metodické poznámky

Příklad slouží k procvičení vzorců

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b); \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: některé goniometrické vzorce

Zjednodušte pro všechny přípustné reálné hodnoty x

$$\frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)}{(4 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 2x) \cdot \sin 2x}.$$

Řešení

Pro všechny přípustné reálné hodnoty x následujících výrazů platí

$$\begin{aligned} & \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)}{(4 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 2x) \cdot \sin 2x} = \frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)}{((2 \sin x \cos x)^2 + \cos^2 2x) \cdot \sin 2x} = \\ &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)}{(\sin^2 2x + \cos^2 2x) \cdot \sin 2x} = -\frac{1 \cdot \cos 2x}{1 \cdot \sin 2x} = -\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -\cotg 2x. \end{aligned}$$

Závěr.

$$\frac{(\sin^4 x - \cos^4 x)}{(4 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 2x) \cdot \sin 2x} = -\cotg 2x.$$

Metodické poznámky

Příklad slouží k procvičení vzorců

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b); \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Závislosti a funkční vztahy

Klíčové pojmy: kvadratické rovnice, slovní úlohy o společné práci

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice

Prázdná chladicí nádrž v továrně musela být co nejrychleji naplněna chladicí kapalinou. Proto byla použita současně dvě čerpadla, takže napouštění trvalo 3 a $\frac{3}{4}$ hodiny. Kdyby bylo spuštěno jen výkonnější čerpadlo, trvalo by napouštění o 4 hodiny méně, než kdyby bylo použito jen druhé čerpadlo. Za jak dlouho by byla nádrž naplněna výkonnějším čerpadlem?

Řešení

Označíme x dobu napouštění výkonnějším čerpadlem. Čerpadlo má tedy výkon $1/x$ nádrže za hodinu. Druhé, méně výkonné, čerpadlo má výkon $1/(x+4)$ nádrže za hodinu. Platí

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) \cdot \left(3 + \frac{3}{4}\right) = 1.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$2x^2 - 7x - 30 = 0.$$

Vypočteme její diskriminant

$$D = b^2 - 4ac = 49 + 4 \cdot 2 \cdot 30 = 289,$$

tedy $\sqrt{D} = \sqrt{289} = 17$, odtud

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 \pm 17}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = 6.$$

Pro zadanou úlohu má smysl jen řešení kladné $x = 6$.

Závěr. Výkonnější čerpadlo by nádrž naplnilo za 6 hodin.

Metodické poznámky

Slovní úloha je názornou ukázkou řešení jednoduché praktické situace. Úloha je o společné práci dvou subjektů. Je známa doba, za kterou splní celý úkol společně a rozdíl dob, za které splní úkol každý samostatně. Počítá se doba, za kterou splní úkol jeden z nich samostatně. Žáci si osvojí pravidlo, že zlomek, tedy část, z celku určíme, když tím zlomkem celek vynásobíme. Déle se procvičí řešení kvadratické rovnice.

Úloha 2 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: kvadratické rovnice

První dělník by ke splnění daného úkolu potřeboval o 4 hodiny méně než druhý dělník. Ve skutečnosti na tomto úkolu pracovali nejprve oba dělníci 2 hodiny společně, zbylou práci pak zvládl za 1 hodinu první dělník sám. V jakém poměru by měly být výše odměn dělníků podle vykonané práce?

Řešení

Řekněme, že první dělník by pracoval sám na splnění úkolu x hodin, a měl by tedy výkonnost $1/x$ úkolu za hodinu. Druhý by sám pracoval na splnění úkolu $x + 4$ hodiny a měl by tedy výkonnost $1/(x + 4)$ úkolu za hodinu. Za 2 hodiny společné práce splní tedy oba dělníci jen část, a to

$$2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 4} \right)$$

úkolu a první dělník pak sám dokončí zbytek za 1 hodinu. Zbytek tedy je $1/x$ úkolu. Podle zadání platí

$$2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 4} \right) + \frac{1}{x} = 1.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

Její řešení lze určit z paměti, neboť součet kořenů je 1 a jejich součin je -12 . Jsou to tedy čísla $x = 4$ a $x = -3$, neboť $4 + (-3) = 1$ a $4 \cdot (-3) = -12$. Pro naši úlohu má smysl jen kladný kořen $x = 4$. Druhý dělník tedy splnil

$$2 \cdot \frac{1}{x + 4} = 2 \cdot \frac{1}{4 + 4} = \frac{1}{4}$$

úkolu. První dělník splnil jeho zbytek, a to jsou $3/4$, tedy třikrát tolik co druhý.

Závěr. Výše odměn pro prvního a druhého dělníka by měla být v poměru $3 : 1$.

Metodické poznámky

Slovní úloha je názornou ukázkou řešení jednoduché praktické situace. Úloha je o společné práci dvou subjektů. Známe je rozdíl dob, které potřebují k samostatnému splnění celého úkolu, dále je známa doba, po kterou pracovali nejdříve na splnění části úkolu společně a doba, kterou potřeboval na dokončení úkolu jeden z nich. Počítá se podíl subjektů na splnění celého úkolu. Žáci si osvojí pravidlo, že zlomek, tedy část, z celku určíme, když tím zlomkem celek vynásobíme. Déle se procvičí řešení kvadratické rovnice.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: soustavy rovnic, kvadratické rovnice

Dva dělníci splnili společně jistý úkol za 5 dnů. Kdyby první dělník svou výkonnost dvakrát zvýšil a druhý dvakrát snížil, trvalo by jim to jen 4 dny. Za kolik dnů by první dělník zvládl celý úkol sám při výkonnosti, které skutečně dosáhl?

Řešení

Řekněme, že by první dělník splnil sám úkol za x dnů a druhý sám za y dnů. Pak by výkonnost prvního dělníka byla $1/x$, resp. druhého $1/y$ úkolu za den. Podle zadání platí soustava dvou rovnic, kde $x \neq 0$, $y \neq 0$

$$\begin{aligned}5 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) &= 1, \\4 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} \right) &= 1.\end{aligned}$$

Po úpravě

$$\begin{aligned}5y + 5x &= xy, \\8y + 2x &= xy.\end{aligned}$$

Máme tedy soustavu dvou lineárních kvadratických rovnic o dvou neznámých. Dále můžeme postupovat dvěma způsoby:

1. Z první rovnice vyjádříme $y = \frac{5x}{x-5}$, $x \neq 5$ a dosadíme do druhé rovnice

$$8 \frac{5x}{x-5} + 2x = x \cdot \frac{5x}{x-5}.$$

Po úpravě

$$x(x-10) = 0.$$

Rovnice má pro zadanou úlohu jediné řešení $x = 10$.

2. Všimneme si, že pravé strany jsou stejné a porovnáním levých stran dostaneme rovnici lineární

$$5y + 5x = 8y + 2x,$$

odkud plyne $x = y$. Dosazením do některé z rovnic soustavy, například do první, dostaneme

$$5x + 5x = x^2.$$

Po úpravě dostaneme zase rovnici $x^2 - 10x = 0$, která má pro zadanou úlohu jediné řešení $x = 10$.

Závěr. První dělník by sám pracoval 10 dnů.

Metodické poznámky

Slovní úloha je názornou ukázkou řešení jednoduché praktické situace. Úloha je o společné práci dvou subjektů. Je známa doba, za kterou společně splní úkol a doba, za kterou by společně splnili úkol při dané změně svých výkonností. Počítá se doba, za kterou jeden z nich splní úkol sám při současné výkonnosti. Úloha vede na řešení soustavy kvadratických rovnic a na řešení ryze kvadratické rovnice.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: doc. RNDr. Josef Zedník, CSc.; josef.zednik@centrum.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: řešení goniometrických rovnic

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: základy řešení goniometrických rovnic

Na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ určete počet reálných řešení goniometrické rovnice

$$\sin x \cdot \cos x = 0.$$

Řešení

Řešením rovnice $\sin x = 0$ jsou na daném intervalu celkem tři hodnoty, a to 0 , π a 2π , řešením rovnice $\cos x = 0$ jsou čísla $\frac{1}{2}\pi$ a $\frac{3}{2}\pi$.

Závěr. Celkově má daná rovnice 5 řešení.

Metodické poznámky

Řešení rovnice je založeno na součinném tvaru, obě rovnice jsou jednoduché, řešení je žákům srozumitelné.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení základních goniometrických rovnic

Určete počet řešení na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ goniometrické rovnice

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 0.$$

Řešení

Řešením rovnice $\cos x = 0$ jsou na daném intervalu dvě hodnoty, a to $\frac{1}{2}\pi$ a $\frac{3}{2}\pi$. Rovnice $\cos 2x = 0$ má na daném intervalu ale již 4 řešení, protože goniometrická funkce dvojnásobného argumentu má poloviční periodu. Řešením jsou proto čísla $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$ a $\frac{7}{4}\pi$. Poslední rovnice $\cos 3x = 0$ bude mít celkem 6 řešení, a to $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$ a $\frac{11}{6}\pi$. Protože obě řešení první rovnice jsou obsažena v řešení třetí rovnice a protože druhá a třetí rovnice mají disjunktní množiny řešení, je celkový počet řešení rovnice $4 + 6 = 10$.

Závěr. Celkově má daná rovnice 10 řešení.

Metodické poznámky

Řešení rovnice je založeno opět na součinném tvaru, druhá a třetí rovnice však mají jinou základní periodu. Řešení však pro žáky obtížné není.

Úloha 3 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení základních goniometrických rovnic, graf goniometrické funkce vícenásobného argumentu

Určete, kolik řešení má na intervalu $\langle 0; 20\pi \rangle$ goniometrická rovnice

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 10x = -1.$$

Řešení

Protože všechny vzájemně násobené funkce mají stejný obor hodnot $H = \langle -1; +1 \rangle$, může mít daná rovnice řešení pouze tehdy, jestliže jednotlivé kosiny nabývají hodnot -1 nebo $+1$.

Prozkoumejme tedy nejprve chování jednotlivých funkcí na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. Funkce $\cos x = 0$ nabývá v krajních bodech hodnoty $+1$ a v bodě $x = \pi$ nabývá hodnoty -1 . Všechny ostatní funkce proto stačí zkoumat v těchto třech bodech. Snadno se vidí, že v krajních bodech bude hodnota funkce $f(x) = \cos nx$ rovna vždy $+1$, kdežto v bodě $x = \pi$ je hodnotou číslo -1 pro lichá n , pro sudá n je hodnotou číslo $+1$.

Funkce $g(x) = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 10x$ má proto v bodě $x = \pi$ hodnotu

$$(-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1.$$

Číslo $x = \pi$ je proto řešením dané rovnice. Protože jsou všechny zkoumané funkce $f(x) = \cos nx$ periodické s periodou 2π , bude řešením každý lichý násobek čísla π .

Závěr. Celkově má daná rovnice 10 řešení.

Metodické poznámky

Při řešení vycházíme z omezení oboru hodnot funkce kosinus. Tento krok je pro mnohé studenty velmi obtížný, i když další postup řešení je už celkem jednoduchý. Úloha je vhodná pro procvičení logického uvažování např. v rámci přípravy na některou z matematických soutěží.

Zdroj: archiv autora

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Radek Horenský, Ph.D.; horensky@gymst.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: kvadratické rovnice, slovní úlohy

Úloha 1 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: obsah čtverce, řešení kvadratické rovnice

Obdélník má délku o 2 cm větší než šířku. Zvětšíme-li každý jeho rozměr o 10 cm, získáme obdélník s obsahem $1\,224\text{ cm}^2$. Určete rozměry původního obdélníku.

Řešení

Označme a_0 délku a b_0 šířku původního obdélníku. Délka obdélníku je o 2 cm větší než šířka, tedy $b_0 = a_0 - 2$. Označme a , b strany obdélníku, který vznikne zvětšením každé strany původního obdélníku o 10 cm, tj.

$$a = a_0 + 10, \quad b = a_0 + 8.$$

Obsah S nově vzniklého obdélníku je $1\,224\text{ cm}^2$, zřejmě platí

$$S = ab.$$

Po dosazení za $a = a_0 + 10$, $b = a_0 + 8$, $S = 1\,224\text{ cm}^2$ dostaneme

$$(a_0 + 10)(a_0 + 8) = 1\,224. \quad (1)$$

Po provedení ekvivalentních úprav dostaneme rovnici (1) ve tvaru

$$a_0^2 + 18a_0 - 1\,144 = 0. \quad (2)$$

Řešením kvadratické rovnice (2) je prvek $a_0 = 26$, jelikož a_0 je kladné reálné číslo, odtud $b_0 = 24$.

Závěr. Délka původního obdélníku je 26 cm a šířka 24 cm.

Metodické poznámky

Úlohu lze využít při opakování a procvičování kvadratických rovnic ale i při samostatné práci žáků.

Úloha 2 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: slovní úlohy o pohybu, řešení kvadratické rovnice

Vzdálenost mezi dvěma místy A a B je 120 km. Osobní automobil ujel dráhu mezi místy A a B o 30 minut dříve než motocykl. Určete jejich průměrné rychlosti, víte-li, že rozdíl těchto rychlostí je 12 km h^{-1} .

Řešení

Označme x číselnou hodnotu průměrné rychlosti motocyklu. Průměrná hodnota rychlosti motocyklu je $x \text{ km h}^{-1}$. Průměrná hodnota rychlosti automobilu je $(x + 12) \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Doba, za kterou ujede motocykl dráhu mezi místy A a B je rovna $\frac{120}{x} \text{ h}$, u automobilu je tato doba dána vztahem $\frac{120}{x+12} \text{ h}$. Automobil ujel dráhu mezi místy A a B o $\frac{1}{2} \text{ h}$ dříve než motocykl, tedy

$$\frac{120}{x+12} = \frac{120}{x} - \frac{1}{2}.$$

Prvek x je kladné reálné číslo. Po provedení ekvivalentních úprav dostaneme rovnici ve tvaru

$$x^2 + 12x - 2880 = 0. \quad (3)$$

Řešením kvadratické rovnice (3) je pouze prvek $x = 48$, protože x je kladné reálné číslo. Je-li průměrná rychlost motocyklu 48 km h^{-1} , pak průměrná rychlost automobilu je 60 km h^{-1} .

Závěr. Průměrná rychlost motocyklu na dráze mezi místy A a B je 48 km h^{-1} a průměrná rychlost automobilu na téže dráze je 60 km h^{-1} .

Metodické poznámky

Slovní úloha o pohybu řešená pomocí rovnice v podílovém tvaru převedené na kvadratickou rovnici. Při řešení úlohy je možné diskutovat odlišnost fyzikálního postupu.

Úloha 3 (úroveň 2–3)

Předpokládané znalosti: kombinace bez opakování, kvadratické rovnice

Na gymnáziu byl pořádán pro první a druhé ročníky turnaj v košíkové. Každá třída vyslala do turnaje jedno družstvo, v turnaji měl hrát každý s každým, ale utkání mezi 2. A a 2. C se nekonalo. Počet utkání vzájemně sehraných mezi prvními ročníky a počet utkání vzájemně sehraných mezi druhými ročníky je roven dvěma třetinám počtu utkání vzájemně sehraných mezi prvními a druhými ročníky. Přitom počet družstev z prvních ročníků byl o jedno větší než počet družstev z druhých ročníků. Určete počet družstev z jednotlivých ročníků.

Řešení

Označme x počet družstev z druhých ročníků, pak počet družstev z prvních ročníků je $x + 1$.

Počet utkání vzájemně sehraných mezi žáky prvních ročníků je roven počtu kombinací druhé třídy z $(x+1)$ prvků, tj. $\binom{x+1}{2}$. Počet vzájemně sehraných zápasů mezi žáky druhých ročníků odpovídá počtu kombinací druhé třídy z x prvků ponížených o jeden zápas, který se nekonalo, tj. $\binom{x}{2} - 1$. Počet vzájemně odehraných zápasů mezi prvními a druhými ročníky je $x(x-1)$.

Počet utkání vzájemně sehraných mezi prvními ročníky a počet utkání vzájemně sehraných mezi druhými ročníky je roven dvěma třetinám počtu utkání vzájemně sehraných mezi prvními a druhými ročníky, tedy platí

$$\binom{x+1}{2} + \binom{x}{2} - 1 = \frac{2}{3}x(x+1).$$

Prvek x je přirozené číslo. Po provedení ekvivalentních úprav dostaneme rovnici ve tvaru

$$x^2 - 2x - 3 = 0. \quad (4)$$

Řešením kvadratické rovnice (4) je pouze prvek $x = 3$, protože x je přirozené číslo. Jsou-li tři družstva z druhých ročníků, pak jsou čtyři družstva z prvních ročníků.

Závěr. Turnaje se zúčastnila čtyři družstva z prvních ročníků a tři družstva z druhých ročníků.

Metodické poznámky

Úloha je vhodná pro procvičení kombinatoriky, konkrétně kombinací bez opakování. Řešení vychází z řešení rovnice s kombinačními čísly převedené pomocí ekvivalentních úprav na kvadratickou rovnici.

Zdroj:

Charvát, J., Zhouf, J., Boček, L. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus).

Bušek, I. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985, 530 s.

Obrazový materiál:

Autor: Mgr. Tomáš Tábořský; ttaborsky@gmk.cz

Gradované úlohy

Tematický okruh RVP G: Číslo a proměnná

Klíčové pojmy: proměnná, dráha, čas, rychlost, lineární a kvadratická rovnice

Úloha 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: řešení lineárních rovnic a jejich soustav

Ze dvou míst A a B vzdálených od sebe 27 km vyrazí proti sobě chodec a cyklista. Chodec se pohybuje rychlostí 6 km/h, cyklista rychlostí 24 km/h. Za jak dlouho od okamžiku, kdy vyrazili, a v jaké vzdálenosti od místa A se oba setkají?

Řešení

Chodec a cyklista se pohybují proti sobě, takže součet jejich drah musí být 27 km. Vyrazili ve stejném okamžiku, takže oba budou na cestě po stejnou dobu t . Chodec se pohybuje rychlostí $v_1 = 6$ km/h a urazí dráhu $s_1 = v_1 t = 6t$. Cyklista se pohybuje rychlostí $v_2 = 24$ km/h a urazí dráhu $s_2 = v_2 t = 24t$.

Podle zadání platí

$$s_1 + s_2 = 27,$$

odtud $6t + 24t = 27$, a tedy $t = \frac{27}{30}$ h = $\frac{9}{10}$ h = 54 min.

Závěr. Chodec a cyklista se setkají 5,4 km od místa A za 54 minut od okamžiku, kdy se vydali na cestu.

Úloha 2 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: řešení lineárních rovnic a jejich soustav

Z místa A vyjel autobus směrem do místa B v 6 hodin ráno. V 7 hodin 20 minut vyjelo z místa A auto týměž směrem. Obě vozidla dorazila do místa B současně. Jakou rychlostí jela, je-li vzdálenost obou míst 160 km a průměrná rychlost auta je dvakrát větší než průměrná rychlost autobusu?

Řešení

Je třeba si uvědomit, že obě vozidla urazí stejnou dráhu. Autobus vyjel v 6 h a byl na dráze dobu t_1 , auto vyjelo v 7 h 20 min a bylo na dráze dobu $t_2 = (t_1 - \frac{4}{3})$ h.

Označme $s = 160$ km ujetou dráhu v_1 a $v_2 = 2v_1$ po řadě průměrnou rychlost autobusu a auta. Platí

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{2v_1} = \frac{1}{2}t_1.$$

Proto

$$t_1 - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}t_1,$$

tedy $t_1 = \frac{8}{3} \text{ h} = 2 \text{ h } 40 \text{ min}$. Dopočítáme

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{160}{\frac{8}{3}} = 60 \text{ km/h}, \quad v_2 = 2v_1 = 120 \text{ km/h}.$$

Závěr. Autobus jel rychlostí 60 km/h, auto jelo rychlostí 120 km/h.

Úloha 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: řešení kvadratické rovnice

Do stanice vzdálené 260 km vyjede osobní vlak, za 1 hodinu po něm rychlík, který ujede za hodinu o 40 km více, takže dojde k cíli o 44 minut dříve. Vypočítejte průměrné rychlosti obou vlaků.

Řešení

Oba vlaky se pohybují po stejné dráze, ale různými rychlostmi, takže jsou na dráze různou dobu. Je třeba vhodně si vyjádřit vzájemnou souvislost mezi rychlostí a dobou pohybu prvního a druhého vlaku.

Označme společná dráhu $s = 260 \text{ km}$, t dobu jízdy osobního vlaku, v_o jeho průměrnou rychlost. Potom pro průměrnou rychlost rychlíku v_r bude platit $v_r = v_o + 40$ a po dráze se bude pohybovat po dobu $t - 1 - \frac{44}{60} = t - \frac{26}{15}$ (vyjede o 1 hodinu později a do cíle dojde o 44 min = $\frac{44}{60} \text{ h}$ dříve).

Podle zadání řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$v_o t = 260, \quad (v_o + 40)\left(t - \frac{26}{15}\right) = 260.$$

Z první rovnice vyjádříme t a dosadíme do druhé rovnice, dostaneme

$$(v_o + 40) \left(\frac{260}{v_o} - \frac{26}{15} \right) = 260.$$

Roznásobením levé strany a úpravou dostaneme

$$\frac{40 \cdot 260}{v_o} - \frac{26}{15} v_o - \frac{40 \cdot 26}{15} = 0.$$

Obě strany rovnice vynásobíme $-\frac{15}{26} v_o$ a dostaneme

$$v_o^2 + 40v_o - 6000 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny 60 a -100 , druhý ovšem nevyhovuje zadání úlohy, proto $v_o = 60 \text{ km/h}$. Dopočítáme $t = \frac{260}{v_o} = \frac{13}{3} \text{ h}$, rychlost rychlíku $v_r = v_o + 40 = 100 \text{ km/h}$. Rychlík se bude pohybovat po dobu $t - \frac{26}{15} = \frac{39}{15} \text{ h}$.

Závěr. Osobní vlak se pohyboval průměrnou rychlostí 60 km/h, rychlík průměrnou rychlostí 100 km/h.

Úloha 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: řešení soustav lineárních rovnic

Po okruhu dlouhém 2 550 m jezdí 2 motocykly takovými rychlostmi, že se potkávají každou minutu, jezdí-li proti sobě, a dohánějí se každých 5 minut, jezdí-li týmž směrem. Určete jejich rychlosti.

Řešení

Pokud jezdí motocykly proti sobě, pohybují se vůči sobě rychlostí, která je součtem jejich rychlostí. Pokud jezdí za sebou, jejich rychlosti se odečítají. Jezdí po společné dráze $s = 2\,550$ m. Označme $v_1 > v_2$ rychlosti obou motocyklů (v m/s). Při pohybu opačnými směry se potkávají po 60 s, při pohybu týmž směrem po 300 s. Proto platí

$$60(v_1 + v_2) = 2550,$$

$$300(v_1 - v_2) = 2550.$$

Porovnáním obou rovnic dostaneme po úpravě $v_1 + v_2 = 5(v_1 - v_2)$, tedy $v_1 = \frac{3}{2}v_2$. Dosazením za v_1 do libovolné rovnice pak dostaneme $v_2 = \frac{51}{3}$ m/s = 1,02 km/min = 61,2 km/h, $v_1 = \frac{3}{2}v_2 = \frac{51}{2}$ m/s = 1,53 km/min = 91,8 km/h.

Závěr. Jeden motocykl se pohybuje rychlostí 1,53 km/min, druhý motocykl se pohybuje rychlostí 1,02 km/min.

Metodické poznámky

Úlohy o pohybu, jak se uvedeným úlohám říká, spojují matematiku a základní fyzikální vztahy mezi rychlostí, dráhou a časem. Nejedná se o slepá řešení rovnic, ale těžiště je pochopení úlohy a správné sestavení postupu řešení. Při jejich výkladu, případně procvičování, je nutné postupovat od jednodušších úloh ke složitějším. V podstatě lze pohybující se tělesa pustit proti sobě ve stejný čas (úloha 1), případně posunout odjezdy. Dalším typem jsou úlohy, kdy dohání jedno těleso druhé. Pochopitelně pomalejší těleso se musí začít pohybovat dříve. Dvě varianty tohoto typu úlohy jsou řešeny v úloze 2 a 3. Speciálním a náročným typem jsou úlohy, ve kterých se tělesa pohybují po uzavřených drahách, například po kružnici. Obvykle zkoumáme vzájemná setkání při pohybu za sebou, případně proti sobě – viz úloha 4. Lze konstatovat, že každá taková úloha je originální a vyžaduje od řešitele kromě zápisu všech veličin také správnou logickou úvahu vedoucí ke stanovení strategie, potažmo sestavení výchozí rovnice.

Zdroj: archiv autora,

Janeček, F.: *Algebraické výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy: sbírka úloh k opakování a procvičování učiva matematiky střední školy*. 2. upr. a rozš. vyd. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1991.

Vejsada, F., Talafous, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 2. vyd. Praha: SPN, 1973.

Obrazový materiál:

Autor: PaedDr. Naděžda Kubešová; kubesova@gop.pilsedu.cz