

# METODICKÉ LISTY Z MATEMATIKY

## pro gymnázia a základní vzdělávání

Jaroslav Švrček a kolektiv

**Rámcový vzdělávací program pro gymnázia**

**Vzdělávací oblast:** Matematika a její aplikace

**Tematický okruh:** Argumentace a ověřování

**Typ úloh:** Různé metody řešení



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Obsah

|                            |   |
|----------------------------|---|
| Metodický list 1 . . . . . | 3 |
|----------------------------|---|

## Různé metody řešení

**Tematický okruh RVP G:** Argumentace a ověřování

**Klíčové pojmy:** důkaz přímý, důkaz úplnou indukcí, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí, dělitelnost

### Úloha

Dokažte, že číslo  $n^3 - n$  je pro každé přirozené číslo  $n$  dělitelné šesti.

#### Řešení 1 (úroveň 1)

Předpokládané znalosti: obor přirozených čísel

##### Přímý důkaz

Protože  $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ , je  $n^3 - n$  součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel.

Víme, že v posloupnosti přirozených čísel začínající číslem 1 je každé druhé číslo sudé (tj. dělitelné dvěma) a každé třetí je dělitelné třemi. Proto mezi každými třemi po sobě jdoucími přirozenými čísly musí být aspoň jedno číslo dělitelné dvěma a aspoň jedno číslo dělitelné třemi (nemusí být nutně různá).

Protože číslo je dělitelné šesti, právě když je dělitelné dvěma a zároveň třemi, je součin  $(n + 1)n(n - 1)$  dělitelný šesti pro každé přirozené číslo  $n$ .

#### Metodické poznámky

Zadání úlohy lze zapsat takto:  $\forall n \in \mathbb{N}: 6 \mid (n + 1)n(n - 1)$ . Tuto formuli můžeme převést na tvar:  $\forall n: [n \in \mathbb{N} \Rightarrow 6 \mid (n + 1)n(n - 1)]$ . Přímý důkaz potom vychází z předpokladu  $n \in \mathbb{N}$ . Uvedenou implikaci lze nahradit větou obměněnou  $\forall n: [6 \nmid (n + 1)n(n - 1) \Rightarrow n \notin \mathbb{N}]$ . Důkaz této formule vycházející z předpokladu  $6 \nmid (n + 1)n(n - 1)$  vedoucí k závěru  $n \notin \mathbb{N}$  se nazývá důkazem nepřímým.

#### Řešení 2 (úroveň 1–2)

Předpokládané znalosti: zbytky při dělení, zbytkové třídy

##### Užitím tzv. úplné indukce

Každé přirozené číslo má při dělení šesti právě jeden z těchto zbytků: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Každé přirozené číslo lze proto zapsat právě jedním z tvarů  $6k$ ,  $6k + 1$ ,  $6k + 2$ ,  $6k + 3$ ,  $6k + 4$ ,  $6k + 5$ , kde  $k$  je vhodné celé nezáporné číslo.

Dosadíme do daného výrazu  $(n + 1)n(n - 1)$  postupně každý z uvedených zápisů a ukážeme, že výsledkem je číslo dělitelné šesti.

$$6k : (6k + 1)(6k)(6k - 1) = 6 \cdot [(6k + 1)k(6k - 1)]$$

$$6k + 1 : (6k + 2)(6k + 1)(6k) = 6 \cdot [(6k + 2)(6k + 1)k]$$

$$6k + 2 : (6k + 3)(6k + 2)(6k + 1) = 6 \cdot [(2k + 1)(3k + 1)(6k + 1)]$$

$$6k + 3 : (6k + 4)(6k + 3)(6k + 2) = 6 \cdot [(3k + 2)(2k + 1)(6k + 2)]$$

$$6k + 4 : (6k + 5)(6k + 4)(6k + 3) = 6 \cdot [(6k + 5)(3k + 2)(2k + 1)]$$

$$6k + 5 : (6k + 6)(6k + 5)(6k + 4) = 6 \cdot [(k + 1)(6k + 5)(6k + 4)]$$

Ve všech případech (pro každé přirozené číslo  $n$ ) je tedy součin  $(n+1)n(n-1)$  dělitelný šesti.

### Řešení 3 (úroveň 2)

Předpokládané znalosti: počet podmnožin množiny, kombinační čísla

#### Důkaz sporem

Při důkazu sporem zařadíme mezi předpoklady negaci dokazovaného tvrzení:

$$\neg[\forall n \in \mathbb{N}: 6 \mid (n+1)n(n-1)] \Leftrightarrow [\exists n \in \mathbb{N}: 6 \nmid (n+1)n(n-1)]$$

Snažíme se pak odvodit tvrzení, o němž víme, že je pravdivé, ale v teorii „obohacené“ o náš předpoklad se ukáže, že pravdivá je jeho negace (tj. spor s tím, co máme za prokázané).

Předpokládejme tedy, že platí  $\exists n \in \mathbb{N}: 6 \nmid (n+1)n(n-1)$ . Označme toto číslo jako  $k$ , potom  $6 \nmid (k+1)k(k-1)$ .

Uvažujme množinu, která má  $k+1$  prvků. Počet všech jejích tříprvkových podmnožin je dán kombinačním číslem  $\binom{k+1}{3}$ . Vypočteme:

$$\binom{k+1}{3} = \frac{(k+1)k(k-1)}{6}$$

Víme, že počet podmnožin jakékoliv množiny je dán přirozeným číslem, není tedy možné, aby poslední zlomek  $\frac{1}{6}(k+1)k(k-1)$  nešel krátit šesti. Přidaný předpoklad je tedy nepravdivý, pravdivá je jeho negace, tj. součin  $(n+1)n(n-1)$  je pro každé přirozené číslo  $n$  dělitelný šesti.

### Metodické poznámky

Kombinačních čísel lze použít k důkazům dělitelnosti analogických součinů odpovídajícím dělitelem, např.  $n(n+1)(n+2)(n+3)$  číslem 24 apod. Lze je také použít v předpokladu přímého důkazu.

### Řešení 4 (úroveň 3)

Předpokládané znalosti: princip matematické indukce

#### Důkaz užitím principu matematické indukce

Označme  $T(n) = (n+1)n(n-1)$ .

- (i) Pro  $n = 1$  platí  $T(1) = 0$ , což je číslo dělitelné šesti.
- (ii) Předpokládejme, že pro některé přirozené číslo  $k$  je  $T(k)$  dělitelné šesti. Ukážeme, že za tohoto předpokladu je číslem 6 dělitelné také  $T(k+1)$ .

$$\begin{aligned} T(k+1) &= (k+2)(k+1)k = [(k-1)+3](k+1)k = \\ &= (k-1)(k+1)k + 3(k+1)k = T(k) + 3k(k+1). \end{aligned}$$

Číslo  $k(k+1)$  je součinem dvou po sobě jdoucích přirozených čísel, proto je sudé. Tedy číslo  $3k(k+1)$  je dělitelné šesti. Jelikož podle předpokladu je číslo  $T(k)$  dělitelné šesti, plyne z předcházejícího vztahu, že i  $T(k+1)$  je dělitelné šesti.

Podle principu matematické indukce spojením kroků (i) a (ii) dostáváme, že  $T(n)$  je dělitelné šesti pro každé přirozené číslo  $n$ .

**Zdroj:** dílo autora

**Obrazový materiál:**

**Autor:** RNDr. Miloslav Závodný; `mzavodny@gmail.com`, `miloslav.zavodny@upol.cz`