

VZÁJEMNÝ SMĚR GRAVITAČNÍ SÍLY A TÍHOVÉ SÍLY**Zadání úlohy**

Jaký úhel v závislosti na zeměpisné šířce vzájemně svírají vektory gravitační síly a tíhové síly působící na daném místě povrchu Země na určité těleso?

Řešení úlohy

Gravitační síla $\vec{F}_g$ působící na těleso o hmotnosti m nacházející se na povrchu Země míří do středu S Země (viz obr. 1) a její velikost je dána vztahem

$$F_g = \kappa \frac{mM}{r^2}, \quad (1)$$

kde κ je gravitační konstanta, M je hmotnost Země a r je vzdálenost středu Země a tělesa o hmotnosti m (tj. v uvažovaném případě je r poloměr Země).

Na stejné těleso na povrchu Země působí v soustavě spojené se Zemí také odstředivá síla $\vec{F}_o$ mířící ve směru kolmém na osu rotace Země. Její velikost je dána vztahem

$$F_o = m\omega^2 r \cos \varphi, \quad (2)$$

kde φ je zeměpisná šířka daného místa na povrchu Země, ve kterém se nachází těleso o hmotnosti m , vzdálenost $r \cos \varphi$ je poloměr kružnice, po které se kolem osy rotace Země pohybuje toto těleso, a ω je úhlová rychlost otáčení Země kolem své osy definovaná vztahem

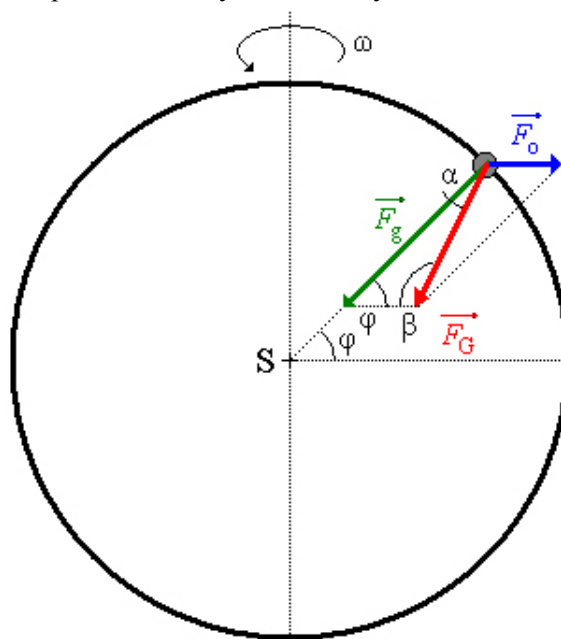
$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (3)$$

Ve vztahu (3) značí T periodu rotace Země kolem své osy.

Tíhová síla $\vec{F}_G$ je dána vektorovým součtem gravitační síly $\vec{F}_g$ a odstředivé síly $\vec{F}_o$, tj. platí

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_o. \quad (4)$$

Náčrt situace je zobrazen na obr. 1, na kterém jsou vyznačeny také úhly α , β a φ . Důležité je si uvědomit, že obrázek není nakreslen ve správném měřítku!!! Velikost odstředivé síly je vzhledem k velikosti gravitační síly výrazně menší, než je zobrazeno na obrázku. Špatné měřítko obrázku je zvoleno pouze pro názornost a pro možnost vyznačení daných úhlů.



obr. 1

Výpočet hledaného úhlu α , který navzájem svírají vektory gravitační síly a tíhové síly, provedeme pomocí sinové věty. Pro poměr velikostí odstředivé síly a gravitační síly tedy můžeme s využitím obr. 1 psát

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{F_o}{F_g}. \quad (5)$$

Po dosazení ze vztahů (1) a (2) dostaneme vztah $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{m\omega^2 r \cos \varphi}{\kappa \frac{mM}{r^2}}$, který můžeme upravit do tvaru

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\omega^2 r^3 \cos \varphi}{\kappa M}. \quad (6)$$

Nyní vyjádříme úhel β pomocí úhlů α a φ , protože cílem výpočtu je vyjádřit závislost úhlu α na úhlu φ . Uvědomíme-li si, že součet úhlů v trojúhelníku je roven 180° , můžeme pro úhel β psát

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \varphi). \quad (7)$$

Dále je nutné připomenout vztah, který vyplývá z periodičnosti a lichosti funkce sinus: pro libovolný reálný argument x platí rovnost:

$$\sin(180^\circ - x) = \sin x. \quad (8)$$

Dosadíme-li nyní vyjádření úhlu β pomocí vztahu (7) do vztahu (6) s přihlédnutím k vlastnosti (8) funkce sinus, dostáváme vztah $\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{\omega^2 r^3 \cos \varphi}{\kappa M}$. Pro další úpravy bude ovšem výhodnější tento vztah psát ve tvaru

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} = \frac{\kappa M}{\omega^2 r^3 \cos \varphi}. \quad (9)$$

(Platí-li rovnost dvou zlomků, pak platí také rovnost obou převrácených zlomků.)

Z goniometrie je znám vztah platící pro sinus argumentu, který je dán součtem dvou libovolných reálných proměnných x a y , ve tvaru

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x. \quad (10)$$

Aplikujeme-li nyní vztah (10) na vztah (9), získáme

$$\frac{\sin \alpha \cos \varphi + \sin \varphi \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\kappa M}{\omega^2 r^3 \cos \varphi}. \quad (11)$$

Tuto rovnost dále upravíme tak, že provedeme součet naznačený v čitateli na levé straně rovnosti, a dostaneme $\frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin \alpha} + \frac{\sin \varphi \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\kappa M}{\omega^2 r^3 \cos \varphi}$. Nyní můžeme krátit výrazem $\sin \alpha$ a využít definici funkce kotangens. Funkce kotangens je definována vztahem

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (12)$$

platícím pro všechna reálná x , pro něž je $\sin x \neq 0$. Podmínky, za kterých má celý výpočet smysl, okomentujeme na závěr výpočtu. Nyní tedy můžeme vztah (11) (i s využitím definičního vztahu (12)) psát ve tvaru

$$\cos \varphi + \sin \varphi \cotg \alpha = \frac{\kappa M}{\omega^2 r^3 \cos \varphi}. \quad (13)$$

Nyní osamostatníme funkci s neznámou α a získáme výraz

$$\cotg \alpha = \frac{\kappa M}{\omega^2 r^3 \sin \varphi \cos \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \quad (14)$$

S využitím dalšího goniometrického vztahu, který je speciálním případem vztahu (10) a který platí pro všechna reálná x , ve tvaru

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (15)$$

a definice (12) funkce kotangens můžeme vztah (14) psát ve tvaru

$$\cotg \alpha = \frac{2\kappa M}{\omega^2 r^3 \sin 2\varphi} - \cotg \varphi. \quad (16)$$

Dosadíme-li za úhlovou frekvenci ω ze vztahu (3), přejde vztah (16) na tvar $\cotg \alpha = \frac{2\kappa MT^2}{4\pi^2 r^3 \sin 2\varphi} - \cotg \varphi$, který upravíme do finálního tvaru

$$\cotg \alpha = \frac{\kappa MT^2}{2\pi^2 r^3 \sin 2\varphi} - \cotg \varphi. \quad (17)$$

Vztah (17) popisuje hledanou závislost úhlu, který navzájem svírají vektory gravitační a tíhové síly, na zeměpisné šířce φ daného místa na Zemi. Tento vztah není příliš jednoduchý na to, abychom v něm viděli konkrétní průběh hledané závislosti. S využitím software *Mathematica* je možné funkci definovanou vztahem (17) vykreslit. Před jejím vykreslením ovšem osamostatníme s využitím cyklometrické funkce úhel α a získáme vztah

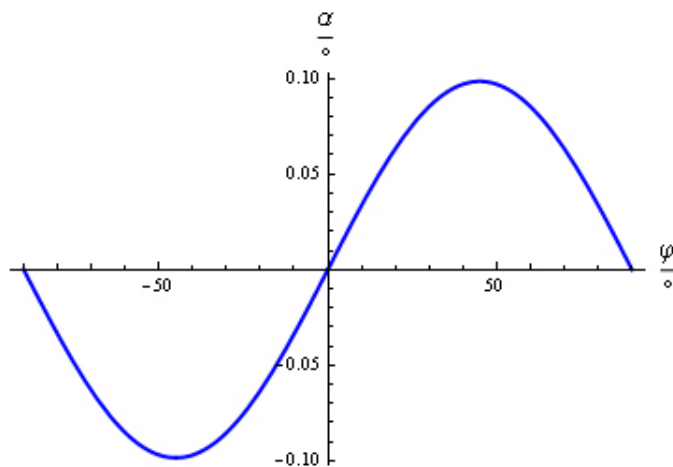
$$\alpha = \operatorname{arccotg} \left(\frac{\kappa MT^2}{2\pi^2 r^3 \sin 2\varphi} - \cotg \varphi \right). \quad (18)$$

Závislost úhlu α , který svírá vektor gravitační a tíhové síly, na zeměpisné šířce φ je zobrazena na obr. 2. Závislost pro hodnoty $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $T = 86400 \text{ s}$ a $r = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$ je vykreslena na intervalu $\varphi \in \langle -90^\circ; 90^\circ \rangle$ a na první pohled připomíná graf funkce dané předpisem

$$f: y = a \sin 2x, \quad (19)$$

kde a je vhodná reálná konstanta. Tuto konstantu určovat nebudeme, protože tvar závislosti zobrazený na obr. 2 graf funkce dané předpisem (19) pouze připomíná, ale obecně jím není. Zobrazený graf je kvalitativně dobře, neboť:

1. na rovníku ($\varphi = 0^\circ$) směr tíhové síly splývá se směrem gravitační síly a tedy jejich odchylka je nulová;
2. na pólech ($\varphi = \pm 90^\circ$) není odstředivá síla definovaná. Máme tedy dvě možnosti, jak definovat v tomto případě úhel α : buď jej dodefinujeme tak, aby byla funkce daná předpisem (18) v těchto bodech spojitá (tj. úhel α bude nulový), nebo bude hodnota úhlu α v těchto dvou bodech nedefinovaná. Obě varianty graf zobrazený na obr. 2 připouští. (A to přes to, že byla uvažovaná závislost vykreslena na uzavřeném intervalu $\langle -90^\circ; 90^\circ \rangle$.)
3. v okolí rovníku se mění znaménko úhlu α , což je v pořádku, pokud uvažujeme úhel mezi gravitační a tíhovou silou jako orientovaný.



obr. 2

Hodnoty úhlu α , který navzájem svírají vektory gravitační síly a tíhové síly, v závislosti na zeměpisné šířce φ rostoucí po 5° jsou uvedeny v tab. 1. V této tabulce jsou zobrazeny pouze

zeměpisné šířky z jedné poloviny Země. Pro popis sledované závislosti na opačné polokouli by byly hodnoty obou úhlů uvedené v tabulce identické.

φ	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
α	1.0'	2.0'	3.0'	3.8'	4.5'	5.1'	5.6'	5.8'	5.9'	5.8'	5.5'	5.1'	4.5'	3.8'	2.9'	2.0'	1.0'

tab. 1

Poznámky k matematickému řešení

Z matematického hlediska je nutné u funkce definované vztahem (18) určit definiční obor. První podmínka vyplývající z přítomnosti neznámé ve jmenovateli má tvar $\sin 2x \neq 0$. Vzhledem k definici (12) funkce kotangens je nutné uvažovat další podmínku ve tvaru $\sin x \neq 0$. Z obou těchto podmínek vyplývá definiční obor funkce definované vztahem (18), který lze psát ve tvaru

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}; \quad (20)$$

definiční obor funkce $y = \operatorname{arccotg} x$ jsou všechna reálná čísla, takže žádná dodatečná podmínka na vnější funkci funkce definované předpisem (18) není.

Z fyzikálního hlediska je tedy nutné pouze vyřešit průběh funkce definované vztahem (18) v bodech $\varphi_1 = 0^\circ$ a $\varphi_{2,3} = \pm 90^\circ$. Všechny tři tyto body jsou ale okomentovány výše v textu. Tedy z fyzikálního hlediska je funkce definovaná vztahem (18) definovaná korektně.

Během výpočtu jsme v jednom kroku (který vedl na vztah ve tvaru (13)) krátili výrazem $\sin \alpha$. Abychom mohli tímto výrazem krátit, musíme mít jistotu, že je tento výraz nenulový. Sinus nabývá nulové hodnoty pro argumenty rovné celočíselnému násobku 180° . Jediným bodem, který musíme vyšetřit zvlášť a který má přitom fyzikální význam, je bod $\alpha = 0$. Tuto hodnotu má hledaná odchylka pouze ve „speciálních bodech“, tj. pro zeměpisnou šířku $\varphi_1 = 0^\circ$ nebo $\varphi_{2,3} = \pm 90^\circ$. V ostatních bodech je hodnota úhlu α nenulová a tedy je nenulový i výraz $\sin \alpha$.

Jiný postup celého výpočtu by mohl být také takový, že bychom hned v úvodu řešení této úlohy místo sinové věty ve tvaru (5) použili její cyklickou záměnu ve tvaru

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{F_o}{F_G}. \quad (21)$$

Na první pohled se zdá, že vztah (21) je jednodušší, neboť v něm vystupují oba úhly, mezi nimiž hledáme závislost. To je sice pravda, ale je nutné si uvědomit, že v něm vystupuje velikost tíhové síly. A tu neurčíme jinak než opět přes sinovou větu s využitím obr. 1. Musíme totiž vzít v úvahu fakt, že tíhové zrychlení (pomocí něhož je definovaná tíhová síla) je obecně odlišné od gravitačního zrychlení, které lze velmi snadno odvodit ze vztahu (1) pro velikost gravitační síly. Matematická náročnost obou postupů je tedy stejná.

Řešení v programovém systému Mathematica

V programovém systému *Mathematica* byl vykreslen graf funkce definované předpisem (18) s využitím příkazu `Plot[funkce[fi], {fi, -90, 90}]`. V notebooku se zdrojovým kódem jsou v tomto příkazu uvedeny i další parametry, které ovlivňují pouze vzhled vykreslovaného grafu.

Je-li definiční vztah (18) přepsán do notebooku systému *Mathematica* obecně jako v tomto textu a konkrétní hodnoty pro planetu Zemi jsou definovány v jiném místě notebooku, lze velmi snadno měnit parametry vystupující v předpisu funkce (18), a tak vyšetřovat závislost mezi danými úhly i u jiných rotujících vesmírných těles.